Approximationstheorie I

Prof. Dr. R. L. Stens
Lehrstuhl A für Mathematik
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Templergraben, Aachen

WS 1995/96

Hans-Georg.Esser@post.rwth-aachen.de
esser@i2.informatik.rwth-aachen.de
WWW: http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/~esser/

Version: 27. April 1997

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Dieses Skript wurde auf der Grundlage einer Vorlesungsmitschrift aus dem Wintersemester 1995/96 von mir erstellt. Herr Stens, der die Vorlesung gehalten hat, hat mich gebeten, darauf hinzuweisen, daß es sich **nicht um ein offizielles Skript** des Lehrstuhls handelt. **Das Skript wurde also insbesondere nicht von Herrn Stens durchgesehen oder korrigiert.**
Das Skript ist leider auch nicht ganz vollständig: im hinteren Teil fehlen einige (sehr ausführliche, „technische“) Beweise.
Über Hinweise auf eventuelle Fehler würde ich mich freuen. Falls jemand die Vorlesung auch gehört hat und Lücken durch eigenen TEX-Code ersetzen kann, würde ich dieses Material gerne in das Skript integrieren. Dies gilt genauso für zum Thema passende Seminar-Ausarbeitungen und äehnliches. Ich hoffe, daß das Skript einigen von Euch eine Hilfe sein kann; ich habe es übrigens damals zur Prüfungsvorbereitung erstellt.
Im World Wide Web liegt das Skript unter der Adresse

`http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de/~esser/docs/approx.ps.gz`

als gzip-komprimierte PostScript-Datei; das gzip-Format kann unter Windows z.B. mit WinZip entpackt werden.

Etwas Propaganda: Mit TEX arbeitet man am besten unter **Linux**, `;-)`

Einleitung

1. Eine schwer zu berechnende Funktion f wird durch eine einfacher zu berechnende Funktion $\widetilde{f}$ ersetzt. „Näherungsweise“ bedeutet z.B., daß der Fehler $\|f-\widetilde{f}\|_{C[a,b]}$ klein sein soll.

2. Eine schwer zu verarbeitende Funktion f wird durch eine leichter zu verarbeitende Funktion $\widetilde{f}$ ersetzt. Gesucht sei etwa $\int_a^b f(u)du$. Ersetze f durch $\widetilde{f}$ und berechne $\int_a^b \widetilde{f}(u)du$. Der Fehler $|\int_a^b f(u)du - \int_a^b \widetilde{f}(u)du|$ soll klein sein. (*numerische Quadratur*)

3. Eine Funktion, die nur teilweise bekannt ist, wird durch eine Funktion ersetzt, die überall bekannt ist. Sind etwa von $f \in C[a,b]$ nur die Werte $f(x_k)$ für

gewisse $x_k \in [a,b]$ bekannt, dann suche eine Funktion $\widetilde{f}$, die auf ganz $[a,b]$ bekannt ist und für die der unter 1.) definierte Fehler $\|f - \widetilde{f}\|_C$ klein ist oder für die gilt: $f(x_k) = \widetilde{f}(x_k)$ (*Interpolation*). Ein praktisches Beispiel hierfür ist die Rekonstruktion eines akustischen Signals aus diskreten Werten in einem CD-Player.

4. Gesucht ist eine Lösung $y \in X$ (X Funktionenraum) der Differentialgleichung $Ly = f$ mit einem Differentialoperator L und einer bekannten Funktion f. Die exakte Lösung $y \in X$ kann man in vielen Fällen nicht bestimmen. Wähle deshalb einen Teilraum $Y \subset X$ und suche eine brauchbare Näherung $\widetilde{y} \in Y$ ($\rightarrow$ *Methode der finiten Elemente*).

Wir werden solche Näherungen nicht für einzelne Funktionen bestimmen, sondern Verfahren angeben, wie man für ganze Klassen von Funktionen geeignete Näherungen konstruieren kann. Außerdem werden wir in der Regel nicht eine einzige Näherung $\widetilde{f}$ konstruieren, sondern eine Folge $(\widetilde{f}_n)_{n=0}^{\infty}$ derart, daß der Fehler für $n \to \infty$ immer kleiner wird.

1 Approximierbarkeit – Weierstraß-Sätze

In diesem Kapitel betrachten wir folgendes *Approximationsproblem*: Gegeben sei ein linearer Raum X von Funktionen, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|_X$ und ein linearer Unterraum $Y \subset X$.
Frage: Existiert zu jedem $f \in X$ eine Folge $(g_n)_{n=0}^{\infty} \subset Y$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_X = 0$?

Als erstes konkretes Beispiel werden wir $X = C[a,b]$ und $Y = \mathcal{P}$ (Menge aller Polynome) behandeln.

Frage: Existiert zu jedem $f \in C[a,b]$ eine Folge von Polynomen (p_n) mit $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\|_{C[a,b]} = 0$?
(d.h. $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$)
Die positive Antwort auf diese Frage gibt der berühmte *Satz von Weierstraß* (1885). Aufgrund dieses Ergebnisses heißen Sätze dieses Typs *Weierstraß-Sätze*. Im ersten Kapitel werden wir eine Reihe solcher Sätze für verschiedene Räume X und Unterräume Y beweisen, darunter auch den oben zitierten.

1.1 Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis

Definition 1

a) Sei X ein linearer Raum (Vektorraum, Linearsystem) über einem Körper Φ ($\Phi = \mathbb{R}$ oder $\Phi = \mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ heißt eine *Norm* auf X, falls

   1. $\|f\|_X \geq 0 \; \forall f \in X$,

2. $\|f\|_X = 0 \iff f = 0$,
3. $\|\alpha f\|_X = |\alpha|\|f\|_X \ \forall f \in X, \alpha \in \Phi$,
4. $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X \ \forall f, g \in X$ (*Dreiecksungleichung*)

b) Ist X ein LR mit einer Norm $\|\cdot\|_X$, dann heißt X oder genauer das Paar $(X, \|\cdot\|_X)$ ein *normierter linearer Raum* (*NLR*).

Anstelle von $\|\cdot\|_X$ schreibt man häufig $\|\cdot\|$, wenn der zugehörige Raum aus dem Zusammenhang klar ist.

Bemerkung 1 Aus (3) und (4) in Definition 1 folgt $\|f - g\| \leq \|f\| + \|g\|$ und $|\|f\| - \|g\|| \leq \|f \pm g\| \ \forall f, g \in X$.

Beispiel 1: Ist $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $C[a, b]$ der LR aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, dann wird durch

$$\|f\|_{C[a,b]} \equiv \|f\|_C := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

eine Norm auf $C[a, b]$ definiert, die als *Supremumsnorm*, *Maximumsnorm* oder *Tschebyscheff-Norm* bezeichnet wird. $(C[a, b], \|\cdot\|_C)$ ist also ein LNR.

Beispiel 2: Eine auf $\mathbb{R}$ definierte komplexwertige Funktion f heißt *2π-periodisch*, falls $f(x + 2\pi) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Die Menge aller stetigen, 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird als der LR $C_{2\pi}$ bezeichnet. Auf $C_{2\pi}$ wird durch

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

eine Norm definiert. Für diese Norm gilt:

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x)| = \max_{x \in [a,a+2\pi]} |f(x)| \quad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

Definition 2
Sei X ein NLR.

a) Eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$ heißt *konvergent* (in X), falls ein $f \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ existiert.
f heißt dann *Grenzwert* (GW) von (f_n).

b) Eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge* (CF), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ existiert, so daß

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon \ \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ mit } m, n > N$$

c) X heißt *vollständig* oder *Banach-Raum*, falls jede Cauchy-Folge in X auch einen Grenzwert in X besitzt.

Bemerkung 2

a) Für $f \in C[a,b]$ und $(f_n) \subset C[a,b]$ sind äquivalent:

   1. (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f,
   2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0$, d.h. (f_n) konvergiert in der $C[a,b]$-Norm gegen f.

b) $C[a,b]$ ist unter der Maximumsnorm ein Banach-Raum.

c) Die Aussagen a) und b) gelten sinngemäß auch für $C_{2\pi}$.

Definition 3

a) Eine Abbildung $T : X \to Y$, wobei X und Y NLR sind, wird auch als *Operator* von X in (nach) Y bezeichnet.

b) Seien X, Y NLR über demselben Körper Φ. Ein Operator $T : X \to Y$ heißt *linear*, falls

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g \;\forall \alpha, \beta \in \Phi,\; f, g \in X$$

Definition 4
Sei X ein NLR. Eine Folge (T_n) (linearer) Operatoren $T_n : X \to X$ heißt *linearer Approximationsprozeß* auf X, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n f - f\| = 0 \;\forall f \in X$.

Die Frage, ob eine gegebene Folge von Operatoren einen Approximationsprozeß bildet, ist eine der zentralen Fragen der Approximationstheorie.

1.2 Sätze von Bohman-Korovkin und Weierstraß in $C[a,b]$

Definition 5
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;(x \in \mathbb{R})$$

mit $a_k \in \mathbb{C}\;\forall k$ ein (komplexes) *algebraisches Polynom* vom *Grad* n. Sind alle a_k reell, dann heißt p_n ein reelles Polynom.
Die Menge aller (komplexen) Polynome vom Grad n wird mit $\mathcal{P}_n$ bezeichnet, und $\mathcal{P} := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ ist die Menge aller algebraischen Polynome.

Approximationsproblem:
Existiert zu jedem $f \in C[a,b]$ eine Folge (p_n) mit $p_n \in \mathcal{P}_n \;\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{C[a,b]} = 0 \;?$$

Die Antwort auf diese Frage gibt der *Satz von Weierstraß*, der die Existenz einer solchen Folge garantiert. Wir werden diesen Satz konstruktiv beweisen, d.h. wir werden zu vorgegebenem $f \in C[a,b]$ die gesuchte Folge von Polynomen explizit angeben.

Definition 6
Sei T ein Operator von $C[a,b]$ in sich.

1. T heißt *positiv*, falls aus $f \in C[a,b]$ mit $f \geq 0$ stets $Tf \geq 0$ folgt. (Bemerkung: $f \geq 0 \Rightarrow f$ reellwertig)
2. T heißt *polynomial*, falls $Tf \in \mathcal{P}$ für alle $f \in C[a,b]$.
3. T heißt *polynomial vom Grad* n, falls $Tf \in \mathcal{P}_n$ für alle $f \in C[a,b]$.

Schreibweise: Für polynomiale Operatoren von $C[a,b]$ in sich schreiben wir auch $T : C[a,b] \to \mathcal{P}$ bzw. $T : C[a,b] \to \mathcal{P}_n$. Anstelle von $(Tf)(x)$ schreiben wir auch $T(f;x)$.

Definition 7
Der *Bernstein-Operator* B_n der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$) ist definiert durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

($f \in C[0,1]$; $x \in [0,1]$). $B_n f$ heißt das *Bernstein-Polynom* der Ordnung n (vom Grad n) zu f.

Die Bernsteinoperatoren sind linear, positiv und polynomial vom Grad n: $B_n : C[0,1] \to \mathcal{P}_n$.

Lemma 1
Sei $T : C[a,b] \to C[a,b]$ linear und positiv, dann gilt:

1. $f \leq g \Rightarrow Tf \leq Tg \ \forall f, g \in C[a,b]$
2. f reellwertig $\Rightarrow Tf$ reellwertig
3. $T(\mathrm{Re} f) = \mathrm{Re}(Tf),\ T(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Im}(Tf)$
4. $|Tf| \leq T|f|$

Beweis:

1. Wegen $f \leq g$ ist $g - f \geq 0$ und es folgt: $T(g-f) \geq 0$ bzw. $Tg \geq Tf$.
2. Sei $f \in C[a,b]$ reellwertig. Setze $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$. Es gilt: $f^+, f^- \in C[a,b],\ f^+, f^- \geq 0$ und $f = f^+ - f^-$ ($|f| = f^+ + f^-$). Wende jetzt T auf f an, dann folgt:
$$Tf = T(f^+ - f^-) = Tf^+ - Tf^- \text{ ist reell,}$$
da Tf^+ und Tf^- reell sind.
3. Es gilt für beliebige $f \in C[a,b]$: $\mathrm{Re}(Tf) + i\mathrm{Im}(Tf) = Tf = T(\mathrm{Re} f + i\mathrm{Im} f) = T(\mathrm{Re} f) + iT(\mathrm{Im} f)$. $T(\mathrm{Re} f)$ und $T(\mathrm{Im} f)$ sind reell, da $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ reell sind. Vergleiche Real- und Imaginärteil.

4. Sei f zunächst reell, dann gilt: $-|f| \leq f \leq |f|$ und mit (i) weiter: $-T(|f|) \leq T(f) \leq T(|f|)$, was zu $|Tf| \leq T|f|$ äquivalent ist. ($-a \leq x \leq a$ für $a \geq 0 \iff |x| \leq a$)
Sei jetzt $f \in C[a,b]$ beliebig und $x \in [a,b]$ fest. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ $\exists r \geq 0$ und $\rho \in \mathbb{R}$ mit $z = re^{i\rho}$, und es gilt $|z| = e^{-i\rho}z$, denn $e^{-i\rho}z = e^{-i\rho}re^{i\rho} = r = |z|$. Wähle jetzt ein r und ρ, so daß $(Tf)(x) = re^{i\rho}$. Mit dieser Darstellung folgt:
$$|(Tf)(x)| = e^{-i\rho}(Tf)(x) = T(e^{-i\rho}f)(x) = \underbrace{T(\mathrm{Re}(e^{-i\rho}f))(x)}_{\text{reell}} + iT(\underbrace{\mathrm{Im}(e^{-i\rho}f)}_{\text{reell, } = 0})(x)$$
(da der Betrag immer reell ist)
$$= T(\mathrm{Re}(e^{-i\rho}f)(x) \leq_{(i)} T(|\mathrm{Re}(e^{-i\rho}f)|)(x)$$
$$\leq_{|Re\ z| \leq |z|} (T(|e^{-i\rho}f|))(x) = (T(|f|))(x) \ \blacksquare$$

Satz 1 (Bohman-Korovkin)
Sei $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge positiver, linearer Operatoren von $C[a,b]$ in sich. Äquivalent sind:

1. $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ ist ein linearer Approximationsprozeß auf $C[a,b]$, d.h.
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_{C[a,b]} = 0 \ (f \in C[a,b])$$

2. Für die Funktionen $f_k(x) = x^k,\ k = 0,1,2$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f_k - f_k\|_{C[a,b]} = 0$$

3. Für die Funktion f_0 wie oben und $\rho_x(u) := (u-x)^2,\ x,u \in [a,b]$, gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f_0 - f_0\|_{C[a,b]} = 0, \lim_{n\to\infty} \{\sup |(T_n\rho_x)(x)|\} = 0$$
Dabei bedeutet $(T_n\rho_x)(x)$ die Anwendung des Operators T_n auf $\rho_x(u)$ als Funktion von u bei festem $x \in [a,b]$ und anschließender Auswertung an der Stelle x,
$$(T_n\rho_x)(x) = (T_n\rho_x)(y)|_{y=x}$$

Beweis: Ringschluß: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2): klar.
(2) $\Rightarrow$ (3): Halte x fest, und wende T_n bezüglich u an.
$$|T_n(\rho_x; x)| = |T_n((u-x)^2; x)| = |T_n(u^2 - 2xu + x^2; x)|$$
$$= |T_n(u^2; x) - 2xT_n(u; x) + x^2 T_n(1; x)| = |T_n(f_2; x) - 2xT_n(f_1; x) + x^2 T_n(f_0; x)|$$
$$= |T_n(f_2; x) - x^2 - [2xT_n(f_2; x) - 2x^2] + [x^2 T_n(f_0; x) - x^2]|$$
$$= |[T_n(f_2; x) - f_2(x)] - 2x[T_n(f_1; x) - f_1(x)] + x^2[T_n(f_0; x) - f_0(x)]$$

$$\leq \underbrace{\|T_nf_2 - f_2\|_{C[a,b]}}_{\to 0,\ n\to\infty} + 2 \underbrace{\max_{x\in[a,b]} x}_{<\infty} \underbrace{\|T_nf_1 - f_1\|_{C[a,b]}}_{\to 0,\ n\to\infty} + \underbrace{\max_{x\in[a,b]} x^2}_{<\infty} \underbrace{\|T_nf_0 - f_0\|_{C[a,b]}}_{\to 0,\ n\to\infty} \to 0, n \to \infty$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Wegen $f \in C[a,b]$ ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, so daß für alle $x, u \in [a,b]$ mit $|x-u| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ wie oben, dann gilt $|f(u) - f(x)| < \varepsilon$, falls $|x-u| < \delta$.

$$|f(u) - f(x)| \leq 2\|f\|_C \leq 2\|f\|_C(\frac{|x-u|}{\delta})^2 = 2\|f\|_C\delta^{-2}\rho_x(u),\ |x-u| \geq \delta$$

Damit gilt für alle $x, u \in [a,b]$:

$$(*)\ |f(u) - f(x)| < \varepsilon + 2\|f\|_c\delta^{-2}\rho_x(u) = \varepsilon \underbrace{f_0(u)}_{=1} + 2\|f\|_C\delta^{-2}\rho_x(u)$$

Sei $x \in [a,b]$ fest, d.h. $f(x)$ ist eine Konstante. Wende T_n wieder bezüglich u an.
Abkürzung:

$$\varepsilon_n^{(0)} := \underbrace{\|T_nf_0 - f_0\|_C}_{\to 0},\ \varepsilon_n^{(1)} := \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |T_n(\rho_x; x)|}_{\to 0}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
|(T_nf)(x)| &\leq |(T_nf(u))(x) - (T_nf(x))(x)| + |(T_nf(x))(x) - f(x)| \\
&= |(T_n(f(u) - f(x))(x)| + |f(x)[(T_nf_0)(x) - f_0(x)]| \quad \text{(da } T \text{ linear)} \\
&\leq (T_n|f(u) - f(x)|)(x) + \|f\|_C\varepsilon_n^{(0)} \quad \text{(nach Lemma 1 (iv))} \\
&\leq_{(*)} T_n(\varepsilon f_0(u) + 2\|f\|_C\delta^{-2}\rho_x(u))(x) + \varepsilon_n^{(0)}\|f\|_C \\
&= \varepsilon(T_nf_0)(x) + 2\|f\|_C\delta^{-2} \underbrace{(T_n\rho_x)(x)}_{\leq \varepsilon_n^{(1)}} + \varepsilon_n^{(0)}\|f\|_C \\
&\leq \varepsilon\{\underbrace{|(T_nf_0)(x) - f_0(x)|}_{\leq \varepsilon_n^{(0)}} + 1\} + 2\|f\|_C\delta^{-2}\varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(0)}\|f\|_C \\
&\leq \varepsilon\varepsilon_n^{(0)} + \varepsilon + 2\|f\|_C\delta^{-2}\varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(0)}\|f\|_C
\end{aligned}$$

Es folgt $\|T_nf - f\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon + (\varepsilon + \|f\|_C)\varepsilon_n^{(0)} + 2\|f\|_C\delta^{-2}\varepsilon_n^{(1)}$ und für $n \to \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_nf - f\|_C \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, muß gelten:

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_nf - f\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_nf - f\| = 0.$$

Damit ist $\lim \|T_nf - f\| = 0$. ∎

Bernsteinoperator $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ linear, positiv.

Lemma 2
Mit den Bezeichnungen aus Satz 1 und Definition 7 gilt:

1. $B_n f_0 = f_0$ $(n \in \mathbb{N})$
2. $B_n f_1 = f_1$ $(n \in \mathbb{N})$
3. $(B_n f_2)(x) = f_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Beweis: Übung

Satz 2 (Bernstein, 1912)
Die Folge der Bernstein-Operatoren (B_n) bildet einen Approximations-Prozeß auf $C[0,1]$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_{C[0,1]} = 0 \ (f \in C[0,1])$$

Der Beweis folgt aus Satz 1 und Lemma 2. ■

Satz 3 (Weierstraß, 1885)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, dann existiert zu jedem $f \in C[a,b]$ eine Folge $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{C[a,b]} = 0.$$

Beweis: Gegeben $f \in C[a,b]$, bilde $F(x) = f(a + (b-a)x)$. $F \in C[0,1]$, also $\|B_n F - F\|_{C[0,1]} \to 0$. Rücktransformation: $x = \frac{t-a}{b-a}$, $x \in [0,1] \iff t \in [a,b]$. Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} |(B_n F)(\frac{t-a}{b-a}) - \underbrace{F(\frac{t-a}{b-a})}_{=f(t)}| = 0$$

Damit folgt die Behauptung mit

$$p_n(t) := B_n(F; \frac{t-a}{b-a}) \in \mathcal{P}_n$$

$$B_n(F; \frac{t-a}{b-a}) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k/n)\binom{n}{k} \underbrace{\frac{t-a}{b-a}^k}_{\in \mathcal{P}_k} \underbrace{(1 - \frac{t-a}{b-a})^{n-k}}_{\in \mathcal{P}_{n-k}} \in \mathcal{P}_n \ ■$$

Bemerkung 3 Ist f reellwertig, dann sind die Bernstein-Polynome ebenfalls reellwertig, d.h. in diesem Fall können die Polynome in Satz 3 ebenfalls reell gewählt werden. Darüberhinaus bleiben alle Ergebnisse von Kapitel 1.2 richtig, wenn man $C[a,b]$ als die Menge der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ definiert und $\mathcal{P}_n$ als die Menge der reellen Polynome.

1.3 Sätze von Bohman-Korovkin und Weierstraß in $C_{2\pi}$

Definition 8
Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$(*) \qquad t_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \ (x \in \mathbb{R})$$

mit $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein (komplexes) *trigonometrisches Polynom* vom Grad n. Die Menge aller trigonometrischen Polynome vom Grad n wird mit Π_n bezeichnet. $\Pi = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Pi_n$ ist die Menge aller trigonometrischen Polynome.

Bemerkung 4 Ein trigonometrisches Polynom der Form (*) ist genau dann reellwertig, wenn $c_k = \overline{c_{-k}}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$. In diesem Fall läßt sich t_n in der Form

$$(**) \qquad t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

schreiben, mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, nämlich:

$$a_k := c_k + c_{-k}, \; b_k := i(c_k - c_{-k})$$

Umgekehrt läßt sich jedes reelle trigonometrische Polynom der Form $(**)$ in die Form $(*)$ bringen mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_k = (a_k - ib_k)/2, \; c_{-k} = (a_k + ib_k)/2, \; k \in \mathbb{N}(k \leq n)$$

Approximationsproblem:
Existiert zu jedem $f \in C_{2\pi}$ eine Folge $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $t_n \in \Pi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \|f - t_n\|_{C_{2\pi}} = 0 \; ?$$

Die Definitionen *positiver Operator*, *polynomialer Operator* (vom Grad n) (Definition 6) übertragen sich sinngemäß auf Operatoren von $C_{2\pi}$ in sich. Dabei bedeutet polynomial (vom Grad n), daß $Tf \in \Pi$ (Π_n). Die Aussagen von Lemma 1 bleiben ebenfalls sinngemäß erhalten.

Satz 4 (Bohman-Korovkin in $C_{2\pi}$)
Sei $(T_n)_0^{\infty}$ eine Folge positiver, linearer Operatoren von $C_{2\pi}$ in sich. Äquivalent sind:

1. $(T_n)_0^{\infty}$ ist ein linearer Approximationsprozeß auf $C_{2\pi}$, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f - f\|_{C_{2\pi}} = 0 \; (f \in C_{2\pi})$$

2. Für die Funktionen f_k $(k = 0, 1, 2)$ mit $f_0 := 1$, $f_1(x) := \cos x$ und $f_2(x) := \sin x$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f_k f_k\|_{C_{2\pi}} = 0$$

3. Für die Funktionen $f_0 = 1$ und $\varphi_x(u) = \sin((u - x)^2/2)$, $x, u \in \mathbb{R}$, gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f_0 - f_0\|_{C_{2\pi}} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(T_n \varphi_x)(x)| = 0$$

Dabei ist $(T_n \varphi_x)(x)$ wie in Satz 1 zu verstehen.

Beweis: analog Satz 1, Übung.

Lemma 3
Sei $(T_n)_0^\infty$ eine Folge positiver, linearer Operatoren von $C_{2\pi}$ in sich. Für $f_1(x) := \cos x$, $f_2(x) := \sin x$ und $f_3(x) := e^{ix}$ sind äquivalent:

1. $\lim \|T_n f_1 - f_1\|_{C_{2\pi}} = 0$ und $\lim \|T_n f_2 - f_2\|_{C_{2\pi}} = 0$
2. $\lim \|T_n f_3 - f_3\|_{C_{2\pi}} = 0$

Definition 9
Der *Fejér-Operator* der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch

$$(\sigma_n f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) F_n(u) du$$

(für $f \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R}$), wobei

$$F_n(u) := \begin{cases} \frac{1}{n+1}[\frac{\sin \frac{n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}]^2, & u \in \mathbb{R}, u \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1, & u \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\sigma_n f$ heißt auch *Fejér-Mittel* vom Grad n (Ordnung n) von $f \in C_{2\pi}$.

Bemerkung 5 Das Fejér-Mittel $\sigma_n f$ ist ein sogenanntes *periodisches Faltungsintegral* mit *Kern* $(F_n)_0^\infty$ (vgl. → Definition 12). Andere Bezeichnungen für $\sigma_n f$ sind *Cesàro-Mittel*, *(C,1)-Mittel* oder *erstes arithmetisches Mittel* der Fourier-Reihe von f. Der Grund für diese Bezeichnungen wird später im Zusammenhang mit der Theorie der *Fourier-Reihen* klar werden.

Lemma 4
Für beliebige $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{imx} e^{-inx} dx = \delta_{mn}$$

(wobei δ_{mn} das *Kronecker-Symbol* ist)

Bemerkung 6 Die Eigenschaft in Lemma 4 wird als *Orthonormiertheit* des trigonometrischen Systems $(e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ (in der komplexen Schreibweise) bezeichnet.

Lemma 5

1. Der Fejér-Kern F_n aus Definition 9 hat die Darstellung

$$F_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n+1}) e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{k}{n+1}) \cos kx,$$

   und für die Fejér-Mittel $\sigma_n f$ gilt:

$$(\sigma_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n+1}) f\hat{}(k) e^{ikx}$$

mit
$$f\hat{}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du,\ k \in \mathbb{Z}$$

2. Die Fejér-Operatoren σ_n sind positive lineare Operatoren von $C_{2\pi}$ in sich und sind polynomial vom Grad n. Außerdem gilt für die Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 (Satz 4, Lemma 3):

   (a) $\sigma_n f_0 = 1$,

   (b) $\sigma_n f_1 = \frac{n}{n+1} f_1$,

   (c) $\sigma_n f_2 = \frac{n}{n+1} f_2$,

   (d) $\sigma_n f_3 = \frac{n}{n+1} f_3$.

Beweis:

1. Darstellung von F_n: Übung (Induktion)
   Darstellung von $\sigma_n f$: Das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)du$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$, da f und F_n stetig sind. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
(\sigma_n f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e^{iku}du \\
&= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)e^{iku}du \quad [\text{Subst.: } x-u=t] \\
&= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(t)e^{-ikt}dte^{ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt}_{=f\hat{}(k)}\, e^{ikx}
\end{aligned}$$

2. Aus den Darstellungen von F_n in Definition 9 und von $\sigma_n f$ in Definition 9 und Lemma 5.1 folgt sofort: $\sigma_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ linear und positiv. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
a) \quad \sigma_n f_0 &= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f_0(t)}_{e^{i0t}}e^{-ikt}dt}_{\delta_{0k}}\, e^{ikx} \\
&= 1 \\
d) \quad (\sigma_n f_3)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\delta_{1k}e^{ikx} = (1-\frac{1}{n+1})e^{ix} \\
&= \frac{n}{n+1}f_3(x)
\end{aligned}$$

b) und c) folgen durch Aufspalten von $\sigma_n f_3$ in Real- und Imaginärteil. ■

Bemerkung 7 Die komplexen Zahlen $f\hat{}(k)$ in Lemma 5.1 heißen *komplexe Fourier-Koeffizienten* von f (vgl. → Definition 14).

Satz 5 (Satz von Fejér, 1900)
Die Fejér-Operatoren $(\sigma_n)_0^\infty$ bilden einen linearen Approximationsprozeß auf $C_{2\pi}$.

Beweis: mit Satz 4 und Lemma 5.2 (Lemma 3). ∎

Satz 6 (Satz von Weierstraß für $C_{2\pi}$)
Zu jedem $f \in C_{2\pi}$ existiert einen Folge $(t_n)_0^\infty$ mit $t_n \in \Pi_n$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\|_{C_{2\pi}} = 0$$

Beweis: $t_n := \sigma_n f$; Satz 5. ∎

Bemerkung 8 Die Ergebnisse von Kapitel 1.3 mit Ausnahme von Lemma 3 und Lemma 5.2 d) bleiben richtig, wenn man $C_{2\pi}$ als die Menge der reellwertigen, stetigen, 2π-periodischen Funktionen definiert und Π_n als die Menge der reellwertigen trigonometrischen Polynome vom Grad n. Man beachte, daß in diesem Fall $e^{ix} \notin C_{2\pi}$.

1.4 Approximation durch trigonometrische Polynome in $L^p_{2\pi}$

Definition 10

1. $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$ ist der lineare Raum (von Äquivalenzklassen) 2π-periodischer meßbarer Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}^*)$, für die gilt:
$$\|f\|_{L^p_{2\pi}} \equiv \|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p du \right)^{1/p} < \infty$$
2. $L^\infty_{2\pi}$ ist der lineare Raum (von Äquivalenzklassen) 2π-periodischer meßbarer Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}^*)$, für die gilt:
$$\|f\|_{L^\infty_{2\pi}} \equiv \|f\|_\infty := \operatorname{wes\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$$
(d.h.: f *wesentlich beschränkt*)
3. $X_{2\pi}$ ist im folgenden immer einer der Räume $C_{2\pi}$ oder $L^p_{2\pi}, 1 \le p < \infty$. Entsprechend steht $\|\cdot\|_{X_{2\pi}}$ für $\|\cdot\|_{C_{2\pi}}$ oder $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$.

Bemerkung 9 $\operatorname{wes\,sup} |f(x)|$ ist die kleinste Zahl $M \ge 0$ mit $|f(x)| \le M$ f.ü. (*fast überall*) auf $\mathbb{R}$. Also:

$$\operatorname{wes\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \inf\{M \ge 0 : \ m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

Da f 2π-periodisch ist, gilt

$$\operatorname{wes\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \operatorname{wes} \sup_{x\in[a,a+2\pi]} |f(x)| \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

Die englische Bezeichnung für $\operatorname{wes\,sup}$ ist $\operatorname{ess\,sup}$ (*essential supremum*).

Bemerkung 10 Wegen der Periodizität von $f \in X_{2\pi}$ ist die $X_{2\pi}$-Norm *translations-invariant*, d.h.

$$\|f(\cdot + h)\|_{X_{2\pi}} = \|f\|_{X_{2\pi}} \ (h \in \mathbb{R})$$

Dasselbe gilt für die $L^\infty_{2\pi}$-Norm.

Einschub: Beweis von L29 und L30, L-Skript. später. (Mitschrift: S. 23-25)

Approximationsproblem:
Existiert zu gegebenem $f \in L^p_{2\pi}$, $1 \le p \le \infty$ eine Folge $(t_n)_{n=0}^\infty$ mit $t_n \in \Pi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \|t_n - f\|_{L^p_{2\pi}} = 0 \ ?$$

Definition 11
Sind f, g zwei meßbare, 2π-periodische Funktionen, dann heißt

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du \ (x \in \mathbb{R})$$

die *Faltung* (englisch: *convolution*) von f und (mit) g.

Bemerkung 11 In Definition 11 wird nichts über die Existenz des Integrals vorausgesetzt. Es ist möglich, daß die Faltung $(f * g)(x)$ für kein $x \in \mathbb{R}$ existiert.

Lemma 6

1. Sind f, g wie in Definition 11 und existiert $(f * g)(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ (als endliche Zahl), dann gilt für dieses x:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

2. Ist $f \in C_{2\pi}$ und $\chi \in L^1_{2\pi}$, dann existiert die Faltung $(f * \chi)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, es gilt $f * \chi \in C_{2\pi}$, und

$$\|f * \chi\|_{C_{2\pi}} \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_{C_{2\pi}}\|\chi\|_1$$

3. Ist $f \in L^p_{2\pi}, 1 \le p \le \infty$ und $\chi \in L^1_{2\pi}$, dann existiert die Faltung $(f * \chi)(x)$ f.ü. auf $\mathbb{R}$, es gilt $f * \chi \in L^p_{2\pi}$, und

$$\|f * \chi\|_{L^p_{2\pi}} \le \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^p_{2\pi}}\|\chi\|_1$$

Beweis:

1. folgt mit der Substitution $x - u = t$; beachte dabei: L15 (L-Skript) und

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} = \int_{-\pi}^{\pi}$$

2. Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x-u)$ als Funktion von u stetig, also auch meßbar. Deshalb ist $f(x-u)\chi(u)$ als Funktion von u meßbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)\chi(u)|du &\le \underbrace{\sup_{u\in\mathbb{R}} |f(x-u)|}_{\|f(x-\cdot)\|_{C_{2\pi}}} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(u)|du}_{\frac{1}{2\pi}\|\chi\|_{L^1_{2\pi}}} \\
&\le \|f(x-\cdot)\|_{C_{2\pi}} \frac{1}{2\pi}\|\chi\|_{L^1_{2\pi}} \\
&= \|f\|_{C_{2\pi}} \frac{1}{2\pi}\|\chi\|_1 \quad \text{(nach Bemerkung 10)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Existenz der Faltung für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
(*) \quad |(f*\chi)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u)\chi(u)|du \\
&\le \frac{1}{2\pi}\|f\|_{C_{2\pi}}\|\chi\|_1 \ (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Zeige noch: $f*\chi$ ist stetig. Da f stetig und periodisch ist, ist f sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ derart, daß $|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $|h| < \delta$. Damit gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned}
|(f*\chi)(x+h) - (f*\chi)(x)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(x+h-u) - f(x-u)|}_{<\varepsilon} \cdot |\chi(u)|du \\
&< \varepsilon \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(u)|du}_{<\infty \text{ (1-Norm)}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von $f*\chi$ gezeigt – und da $f*\chi$ offensichtlich 2π-periodisch ist [da f 2π-periodisch ist], folgt $f*\chi \in C_{2\pi}$.
Die Abschätzung für $\|f*\chi\|_{C_{2\pi}}$ folgt aus $(*)$.

3. Wir formulieren die *verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung* ($\rightarrow$ L31) für 2π-periodische Funktionen:
Sei $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Ist $F(\cdot,u) \in L^p_{2\pi}$ für fast alle $u \in \mathbb{R}$ und $\|F(\cdot,u)\|_{L^p_{2\pi}} \in L^1_{2\pi}$ (als Funktion von u), dann existiert das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} F(x,u)du$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$, ist meßbar, und es gilt

$$\|\int_{-\pi}^{\pi} F(\cdot,u)du\|_p \le \int_{-\pi}^{\pi} \|F(\cdot,u)\|_p du$$

Wähle jetzt $F(x,u) = f(x-u)\chi(u)$. Die Meßbarkeit von F als Funktion von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist ein Ergebnis der Maßtheorie (z.B.: Hewitt-Stromberg: *Real and Complex Analysis*, S. 396, 1. Auflage 1965). Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|F(\cdot,u)\|_p &= \|f(\cdot-u)\chi(u)\|_p \\ &= |\chi(u)|\|f(\cdot-u)\|_p \text{ nach L24} \\ &= |\chi(u)|\|f\|_p \in L^1_{2\pi} \text{ (Bemerkung 10)}\end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere, daß $\|F(\cdot,u)\|_p < \infty$ für fast alle $u\in\mathbb{R}$, d.h. $F(\cdot,u)\in L^p_{2\pi}$ für fast alle $u\in\mathbb{R}$. Mit Minkowski erhält man nun:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\chi(u)du = (f*\chi)(x)$$

existiert für fast alle $x\in\mathbb{R}$, ist meßbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\|f*\chi\|_p &= \|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cdot-u)\chi(u)du\|_p \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot-u)\chi(u)\|_p du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\|f(\cdot-u)\|_p}_{\|f\|_p \text{ unabh. von } u}|\chi(u)|du = \|f\|_p\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(u)|du}_{\|\chi\|_1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\|f\|_p\|\chi\|_1. \blacksquare\end{aligned}$$

Definition 12
Sei $\mathbb{A}$ entweder ein Intervall (a,b) mit $-\infty\le a<b\le\infty$ oder $\mathbb{A}=\mathbb{N}$ oder $\mathbb{A}=\mathbb{N}_0$, und sei ρ_0 einer der Punkte a,b oder $+\infty$.
Eine Familie $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}\subset L^1_{2\pi}$ heißt ein *Kern*, falls

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_\rho(u)du = 1 \ (\rho\in\mathbb{A})$$

Für einen Kern $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ und $f\in L^p_{2\pi}$ $(1\le p\le\infty)$ oder $f\in C_{2\pi}$ heißt

$$(I_\rho f)(x) :\equiv I_\rho(f;x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\chi_\rho(u)du \equiv (f*\chi_\rho)(x) \ (\rho\in\mathbb{A})$$

ein (periodisches) *Faltungsintegral* (singuläres Faltungsintegral) mit Kern (χ_ρ).

Bemerkung 12 Ist $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein Kern im Sinne von Definition 12, dann bezeichnet man auch die einzelnen Funktionen χ_ρ als Kern. Das Faltungsintegral $I_\rho f$ ist die Faltung von f mit χ_ρ.

Lemma 7
Ist (χ_ρ) ein Kern und $f\in C_{2\pi}$, dann ist $I_\rho f\in C_{2\pi}$, und für $f\in L^p_{2\pi}$ ist $I_\rho f\in L^p_{2\pi}$.
Beweis: Lemma 6.2 und 6.3 $\blacksquare$

Beispiel 3: Der Fejér-Kern aus Definition 9 (vgl. Bemerkung 5) ist ein Kern im Sinne von Definition 12, denn (vgl. Lemma 5.1): Für $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)du = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}du}_{\delta_{k,0}} = 1$$

Das zugehörige Faltungsintegral $I_n f$ mit $f \in C_{2\pi}$ oder $f \in L^p_{2\pi}$ heißt auch in diesem allgemeinen Rahmen wieder *Fejér-Mittel* und wird wieder mit $\sigma_n f$ bezeichnet. Die Darstellung von $\sigma_n f$ aus Lemma 5.1 gilt auch für $f \in L^p_{2\pi}$.

Definition 13
Ein Kern $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ heißt *approximierende Identität*, falls

$$\begin{array}{ll} (i) & \|\chi_\rho\|_1 \leq M \ (\rho \in \mathbb{A}) \\ (ii) & \lim\limits_{\rho\to\rho_0} \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} |\chi_\rho(u)|du = 0 \ (\delta \in (0,\pi)) \end{array}$$

Lemma 8
Der Fejér-Kern ist eine approximierende Identität.
Beweis: Eigenschaft (i) folgt aus

$$\|F_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(u)|du =_{F_n(u)\geq 0} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)du = 2\pi.$$

Mit der Ungleichung $1 \geq \sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ gilt:

$$|F_n(u)| = \frac{1}{n+1}[\frac{\sin\frac{n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}]^2 \leq \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{u^2} \ (0 \leq |u| \leq \pi)$$

und für beliebiges $\delta > 0$ folgt

$$\int_{\delta\leq|u|\leq\pi} |F_n(u)|du \leq \int_{\delta\leq|u|\leq\pi} \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{u^2}du = \frac{2\pi^2}{n+1}\int_{\delta}^{\pi} u^{-2}du \to 0 \ (n\to\infty) \ \blacksquare$$

Satz 7
Sei $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ eine approximierende Identität. Dann gilt:

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \ (f \in X_{2\pi})$$

Beweis: Es gilt:

$$(I_\rho f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-u) - \underbrace{f(x)}_{\text{konstant}}]\chi_\rho(u)du,$$

und wie im Beweis von Lemma 6 folgt mit der verallgemeinerten Minkowski-Ungleichung (L31):

$$\begin{aligned}
(*)\quad \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|[f(\cdot-u)-f(\cdot)]\chi_\rho(u)\|_{X_{2\pi}} du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot-u)-f(\cdot)\|_{X_{2\pi}}|\chi_\rho(u)| du \\
\text{(L10)}\qquad &= \frac{1}{2\pi}\int_{|u|<\delta} \|f(\cdot-u)-f(\cdot)\|_{X_{2\pi}}|\chi_\rho(u)| du \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|u|<\pi} \|f(\cdot-u)-f(\cdot)\|_{X_{2\pi}}|\chi_\rho(u)| du \qquad (\delta\in(0,\pi))
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von F (falls $f\in C_{2\pi}$) bzw. wegen der Stetigkeit im Mittel (falls $f\in L^p_{2\pi}$, L30) existiert zu $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit

$$\|f(\cdot-u)-f(\cdot)\|_{X_{2\pi}} < \varepsilon \quad \forall\ |u|<\delta.$$

Wähle jetzt dieses δ in $(*)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
2\pi\|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} &< \varepsilon \int\limits_{|u|<\delta} |\chi_\rho(u)|du + \int\limits_{\delta\leq|u|\leq\pi} (\|f(\cdot-u)\|_{X_{2\pi}} + \|f\|_{X_{2\pi}})|\chi_\rho(u)|du \\
&\leq \varepsilon \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |\chi_\rho(u)|du}_{\leq M} + 2\|f\|_{X_{2\pi}} \underbrace{\int\limits_{\delta\leq\|u|\leq\pi} |\chi_\rho(u)|du}_{\to 0 \text{ nach Vor.}}
\end{aligned}$$

Bilde $\limsup\limits_{\rho\to\rho_0}$:

$$\limsup_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} \leq \frac{1}{2\pi}(\varepsilon M + 0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}M$$

Wie im Beweis von Satz 1 (Bohman-Korovkin) folgt daraus die Behauptung. ■

Lemma 9
Sei $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein *positiver Kern*, d.h. $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ist ein Kern, und $\chi_\rho\geq 0$ f.ü. für alle $\rho\in\mathbb{A}$. Sind $f_1(x):=\cos x$, $f_2(x):=\sin x$ und $f_3(x):=e^{ix}$ und $x_0\in\mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f\in X_{2\pi})$
2. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f_k - f_k\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (k=1,2)$
3. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f_3 - f_3\|_{X_{2\pi}} = 0$ (Normkonvergenz)
4. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} (I_\rho f_k)(x_0) = f_k(x_0) \quad (k=1,2)$
5. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} (I_\rho f_3)(x_0) = f_3(x_0)$ (punktweise Konvergenz)

6. $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}(I_\rho \sin^2 \frac{u}{2})(0) = 0$ (erinnert an Bohman-Korovkin)

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2): klar.
(2) $\Rightarrow$ (3): Spalte in Real- und Imaginärteil auf.
(3) $\Rightarrow$ (5): klar, falls $X_{2\pi} = C_{2\pi}$. Sei jetzt $X_{2\pi} = L^p_{2\pi}$ mit $1 \le p < \infty$, und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
(I_\rho f_3)(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x_0-u)}\chi_\rho(u)du \qquad [u \to x-u] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x_0-x+u)}\chi_\rho(x-u)du \\
&\qquad \text{[gleiche Grenzen, da Integration über Periode]} \\
&= f_3(x_0)\overline{f_3(x)}(I_\rho f_3)(x). \\
|(I_\rho f_3(x_0) - f_3(x_0)| &= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |(I_\rho f_3)(x_0) - f_3(x_0)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_3(x_0)\overline{f_3(x)}(I_\rho f_3)(x) - f_3(x_0)f_3(x)\overline{f_3(x)}|^p dx\right\}^{1/p} \\
&= \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f_3(x_0)|^p}_{=1}\underbrace{|\overline{f_3(x)}|^p}_{=1}|(I_\rho f_3)(x) - f_3(x)|^p dx\right\}^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p}\|I_\rho f_3 - f_3\|_{L^p_{2\pi}} \to 0 \text{ nach Voraussetzung}
\end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (4): Spalte in Real- und Imaginärteil auf.
(4) $\Rightarrow$ (6): Wegen $\sin^2\frac{u}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos u)$ gilt

$$\begin{aligned}
2(I_\rho \sin^2 \tfrac{u}{2})(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(0-u))\chi_\rho(u)du \qquad [u \to x_0 - u] \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x_0-u)\chi_\rho(x_0-u)du \\
&\qquad [\cos(x_0-u) = \cos x_0 \cos u + \sin x_0 \sin u] \\
&= 1 - \cos x_0 \underbrace{(I_\rho \cos)(x_0)}_{\to \cos x_0} - \sin x_0 \underbrace{(I_\rho \sin)(x_0)}_{\to \sin x_0} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

(6) $\Rightarrow$ (1):

$$\begin{aligned}
(I_\rho \sin^2 \tfrac{u}{2})(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin^2\frac{u}{2}\chi_\rho(u)}_{\ge 0} du \\
&\ge \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|u|\le\pi}\sin^2\frac{u}{2}\chi_\rho(u)du \\
&\qquad \text{[diese Abschätzung gilt für alle } \delta \in (0,\pi)] \\
&\ge \frac{1}{2\pi}\sin^2\frac{\delta}{2}\int_{\delta\le|u|\le\pi}|\chi_\rho(u)|du
\end{aligned}$$

Also gilt: $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \int\limits_{\delta\le|u|\le\pi} |\chi_\rho(u)|du = 0$. Und da außerdem ((χ_ρ) Kern!) $\|\chi_\rho\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_\rho(u)|du = 2\pi$ ist, folgt, daß (χ_ρ) eine approximierende Identität ist (Definition 13), und damit gilt die Aussage (1) nach Satz 7. ■

Betrachtet man Lemma 9 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (6), dann ist dies ein Satz vom Bohman-Korovkin-Typ in $X_{2\pi}$, allerdings nur für positive Faltungsintegrale und nicht für beliebige positive Operatoren (wie in Satz 4).
[d.h. Bohman-Korovkin gilt nicht in $X_{2\pi}$ (wohl in $C_{2\pi}$), nur unter gewissen Einschränkungen, z.B. spezielle Operatoren, nur Faltungsintegrale, etc.]
Man beachte $(I_\rho 1)(x) = 1 \quad (1 = f_0)$.
Beachte auch

$$\begin{aligned}
(I_\rho \sin^2 \tfrac{u}{2})(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{u}{2}\chi_\rho(u)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x-u}{2}\chi_\rho(x-u)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^2 \frac{x-u}{2}}_{=\chi_x(u)} \chi_\rho(y-u)du \,\Big|_{y=x} \\
&= (I_\rho\chi_x)(y)\,|_{y=x} = (I_\rho\chi_x)(x)
\end{aligned}$$

Damit kann die Aussage (6) wie in Satz 4 geschrieben werden als

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}}(I_\rho\chi_x(x)\right\} = 0$$

Satz 8 (Satz von Weierstraß in $X_{2\pi}$)

1. Zu jedem $f \in X_{2\pi}$ existiert eine Folge $t_n \in \Pi_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, so daß
$$\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\|_{X_{2\pi}} = 0$$
2. Es existiert eine Funktion $f \in L^\infty_{2\pi}$, zu der keine Folge von Polynomen $(t_n) \subset \Pi$ mit $\lim \|f - t_n\|_{X_{2\pi}} = 0$ existiert.

Beweis:

1. folgt aus Satz 7, wenn man dort den Fejér-Kern als approximierende Identität wählt. Man beachte dabei, daß wegen $(\sigma_n f)(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n+1}) f^\frown(k) e^{ikx}$ $\sigma_n f \in \Pi_n$ ist.
2. Zum Beweis von 2. nehmen wir an, daß zu jedem $f \in L^\infty_{2\pi}$ eine Folge $(t_n) \subset \Pi$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|t_n - f\|_\infty = 0$ existiert. Sei jetzt $f \in L^\infty_{2\pi}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|f - t_n\|_\infty < \varepsilon$. Wegen der Translationsinvarianz der

Norm gilt: $\|f(\cdot+h)-t_n(\cdot+h)\|_\infty < \varepsilon$ $(h \in \mathbb{R})$, und es folgt weiter:

$$\begin{aligned}\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_\infty &\leq \|f(\cdot+h)-t_n(\cdot+h)\|_\infty + \|t_n(\cdot+h)-t_n(\cdot)\|_\infty \\ &\quad +\|t_n(\cdot)-f(\cdot)\|_\infty \\ &< 2\varepsilon + \|t_n(\cdot+h)-t_n(\cdot)\|_\infty \\ &= 2\varepsilon + \|t_n(\cdot+h)-t_n(\cdot)\|_{C_{2\pi}} \\ &\to 2\varepsilon \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

Damit haben wir (da $\varepsilon > 0$ beliebig): $\lim_{h\to 0} \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_\infty = 0$. Aus der Existenz der Polynomfolge folgt also die Stetigkeit im Mittel in $L^\infty_{2\pi}$. Diese gilt aber nicht, wie man an der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0] \\ 1, & x \in (0,\pi) \\ 2\pi\text{-periodisch}, & \text{sonst} \end{cases}$$

sehen kann. Es gilt nämlich: $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_\infty = 1 \qquad (h \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$. ■

Bemerkung 13 Aus Satz 8.2 folgt insbesondere, daß die Aussage von Satz 7 in $L^\infty_{2\pi}$ nicht gilt.

Bemerkung 14 Für $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ haben wir einen zweiten Beweis für den Satz von Weierstraß in $C_{2\pi}$ gegeben.

1.5 Fourier-Koeffizienten, Fourier-Reihen

Definition 14
Für $f \in L^1_{2\pi}$ heißt

$$f^\frown(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

der k-te *Fourier-Koeffizient* von f. Die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^\frown(k)e^{ikx} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

heißt *Fourier-Reihe* von f.

Bemerkung 15 Wegen $C_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ und $L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ für $1 \leq p \leq \infty$ sind die Fourier-Koeffizienten (FK) und die Fourier-Reihe (FR) auch für $f \in C_{2\pi}$ und $f \in L^p_{2\pi}$ definiert.
Das Symbol $\sim$ bedeutet nur eine Zuordnung von f zu seiner Fourier-Reihe. Es sagt nichts über die Konvergenz der Reihe oder die Darstellung von f durch die Reihe aus.

Bemerkung 16 Unter Konvergenz einer Reihe der Form $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ verstehen wir die Konvergenz der *symmetrischen Partialsummen* $s_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k$.

Satz 9

1. Sind $f, g \in L^1_{2\pi},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann gilt
   (a) $(\alpha f + \beta g)\hat{}(k) = \alpha f\hat{}(k) + \beta g\hat{}(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$
   (b) $|f\hat{}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 \quad (k \in \mathbb{Z})$
   (c) Das *Lemma von Riemann-Lebesgue*: $\lim\limits_{|k|\to\infty} f\hat{}(k) = 0$

2. Hat $f \in L^1_{2\pi}$ die Darstellung
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{f.ü. mit } c_k \in \mathbb{C},$$
   wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert, dann gilt $f\hat{}(k) = c_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. *Faltungssatz*: Sind $f, g \in L^1_{2\pi}$, dann gilt
$$(f * g)\hat{}(k) = f\hat{}(k) g\hat{}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. *Eindeutigkeitssatz*: Ist $f \in L^1_{2\pi}$ mit $f\hat{}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $f = 0$ f.ü. Für $f \in C_{2\pi}$ gilt dann sogar: $f = 0$.

5. Ist die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in L^1_{2\pi}$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, dann stellt sie die Funktion f.ü. dar, d.h.
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\hat{}(k) e^{ikx} \quad \text{f.ü.}$$
   Für $f \in C_{2\pi}$ gilt die Darstellung überall.

Bemerkung 17 Der Eindeutigkeitssatz läßt sich auch so formulieren: Sind $f, g \in L^1_{2\pi}$ mit $f\hat{}(k) = g\hat{}(k)\ \forall k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $f = g$ f.ü. (bzw. sogar $f = g$ für $f, g \in C_{2\pi}$).

Beweis (Satz 9):

1. (a) klar.
   (b) $|f\hat{}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)| \underbrace{|e^{-iku}|}_{1}}_{\|f\|_1} = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$
   (c) Übung

2. Übung

3. Übung

4. Für $f \in L^1_{2\pi}$ gilt (nach Lemma 8, Satz 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \|\sigma_n f - f\|_1 = 0$. Nun ist (nach Lemma 5.1, Beispiel 3)
$$(\sigma_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)F_n(u)du = \sum_{k=-n}^{n}(1 - \frac{|k|}{n+1}) f\hat{}(k) e^{ikx},$$

d.h. wegen $f^\frown(k) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sigma_n f = 0$. Also ist $\|f\|_{L^1_{2\pi}} = 0$ und somit $f = 0$ f.ü.
Ist $f \in C_{2\pi}$, also stetig, dann folgt aus $f = 0$ f.ü., daß $f = 0$ auf $\mathbb{R}$ ist. (Für die Formulierung des Eindeutigkeitssatzes in Bemerkung 17 wende 4) an auf $f - g$ und benutze 1a).

Rest Übung. ■

Definition 15

1. Für $r \in \mathbb{N}_0$ ist $C^{(r)}_{2\pi} := \left\{ f \in C_{2\pi};\ f^{(r)} \in C_{2\pi} \right\}$.

2. Für $r \in \mathbb{N}$ ist $AC^{(r)}_{2\pi}$ (AC steht für *absolutely continuous*) die Menge aller r-fach absolut stetigen Funktionen, d.h. die Menge aller $\varphi \in C_{2\pi}$ mit der Darstellung

$$\varphi(x) = a_0 + \int_{-\pi}^{x} \left\{ a_1 + \int_{-\pi}^{u_1} \left[a_2 + \ldots + \int_{-\pi}^{u_{r-2}} \left(a_{r-1} + \int_{-\pi}^{u_{r-1}} g(u_r) du_r \right) du_{r-1} \ldots \right] du_2 \right\} du_1$$

für ein $g \in L^1_{2\pi}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Für $r \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ist der *Sobolev-Raum* $W^r_{L^p_{2\pi}}$ definiert durch

$$W^r_{L^p_{2\pi}} := \left\{ f \in L^p_{2\pi} :\ \exists \varphi \in AC^{(r)}_{2\pi} \ \text{ mit } f = \varphi \text{ f.ü. und } \varphi^{(r)} \in L^p_{2\pi} \right\}$$

Außerdem setzt man noch $W^0_{L^p_{2\pi}} := L^p_{2\pi}$ und $W^r_{C_{2\pi}} := C^{(r)}_{2\pi}$.
$W^r_{X_{2\pi}}$ steht für einen der Räume $W^r_{L^p_{2\pi}}$, $1 \le p < \infty$ (wirklich $\neq \infty$!) oder $W^r_{C_{2\pi}}$.

Bemerkung 17

1. $AC^{(r)}_{2\pi}$ ist die Menge der Funktionen $\varphi \in C^{(r-1)}{}_{2\pi}$, deren r-te Ableitung f.ü. existiert und zu $L^1_{2\pi}$ gehört. In der Definition von $W^r_{L^p_{2\pi}}$ wird dagegen gefordert, daß die r-te Ableitung von φ ein Element von $L^p_{2\pi}$ ist. Dies ist wegen $L^p_{2\pi} \subsetneqq L^1_{2\pi}$ für $1 < p \le \infty$ eine im allgemeinen stärkere Bedingung.

2. Für die Ableitungen $\varphi^{(j)}$, $1 \le j \le r$, der Funktionen φ aus der Definition von $W^r_{L^p_{2\pi}}$ schreibt man häufig auch $f^{(j)}$. Hat φ die Integraldarstellung aus Definition 15.2, dann schreibt man insbesondere $f^{(r)} = g$. Man beachte jedoch, daß f überhaupt keine Ableitungen im üblichen Sinne zu haben braucht.

3. Für $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r \le s$ gilt $W^s_{L^p_{2\pi}} \subset W^r_{L^p_{2\pi}}$, und wegen $L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$ gilt $W^r_{L^p_{2\pi}} \subset W^r_{L^1_{2\pi}}$.

4. Anstelle von $W^r_{X_{2\pi}}$ benutzen wir auch $X^{(r)}_{2\pi}$.

Satz 10

1. Für $f \in W^r_{L^1_{2\pi}}$ gilt $[f^{(r)}]^\frown(k) = (ik)^r (f^\frown(k))$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Existiert zu $f \in X_{2\pi}$ ein $g \in X_{2\pi}$ mit
$$(ik)^r f\widehat{\ }(k) = g\widehat{\ }(k) \ (k \in \mathbb{Z}),$$
für ein $r \in \mathbb{N}$, dann ist $f \in W^r_{X_{2\pi}}$, und es gilt $f^{(r)} = g$ f.ü. Eine entsprechende Aussage gilt für $L^\infty_{2\pi}$. Ist $X_{2\pi} = C_{2\pi}$, dann gilt sogar $f^{(r)} = g$.

In beiden Teilen dieses Satzes ist $f^{(r)}$ im Sinne von Bemerkung 17.2 zu verstehen.
Beweis: elementares Integrieren. ∎

Folgerung 1
Ist $f \in W^r_{L^1_{2\pi}}$ und $g \in W^s_{X_{2\pi}}$ für $r, s \in \mathbb{N}_0$, dann ist $f * g \in W^{r+s}_{X_{2\pi}}$, und
$$(f * g)^{(r+s)} = f^{(r)} * g^{(s)} \quad \text{f.ü.}$$
Ist $X_{2\pi} = C_{2\pi}$, gilt obige Gleichung überall.

Beweis: Nach Lemma 6 ist $f * g \in X_{2\pi}$ und $f^{(r)} * g^{(s)} \in X_{2\pi}$.
$$\begin{aligned}(ik)^{r+s}(f * g)\widehat{\ }(k) &= (ik)^{r+s} f\widehat{\ }(k) g\widehat{\ }(k) \qquad \text{nach Satz 9.3}\\ &= [(ik)^r f\widehat{\ }(k)][(ik)^s g\widehat{\ }(k)]\\ &= (f^{(r)})\widehat{\ }(k)(g^{(s)})\widehat{\ }(k) \qquad \text{nach Satz 10.1}\\ &= (f^{(r)} * g^{(s)})\widehat{\ }(k) \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{Satz 9.3}\end{aligned}$$
Also existiert zu $F := f * g \in X_{2\pi}$ ein $G \in X_{2\pi}$, nämlich $G = f^{(r)} * g^{(s)}$, so daß $(ik)^{r+s}F\widehat{\ }(k) = G\widehat{\ }(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Nach Satz 10.2 ist damit $F = f * g \in W^{r+s}_{X_{2\pi}}$ und $F^{(r+s)} = G$ f.ü., d.h.
$$(*) \qquad (f * g)^{(r+s)} = f^{(r)} * g^{(s)} \quad \text{f.ü.}$$
Ist $X_{2\pi} = C_{2\pi}$, d.h. $g \in W^s_{C_{2\pi}} = C^{(s)}_{2\pi}$, dann ist $F = f * g \in C_{2\pi}$ und $G = f^{(r)} * g^{(s)} \in C_{2\pi}$. Nach Satz 10.2 gilt $(*)$ dann überall. ∎

Lemma 10
Für einen positiven Kern $(\chi_\rho)_{\rho \in \boldsymbol{A}}$ sind äquivalent:

1. $\lim\limits_{\rho \to \rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0$ $(f \in X_{2\pi})$
2. $\lim\limits_{\rho \to \rho_0} \chi_\rho\widehat{\ }(1) = 1$

Beweis: Mit $f_3(x) := e^{ix}$ gilt:
$$\begin{aligned}\chi_\rho\widehat{\ }(1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u)e^{-iu}du = (\chi_\rho * f_3)(0)\\ &= I_\rho f_3(0)\end{aligned}$$
Damit gilt:
$$\lim_{\rho \to \rho_0} \chi_\rho\widehat{\ }(1) = 1 \iff \lim_{\rho \to \rho_0} (I_\rho f_3)(0) = 1 = f_3(0)$$

Die Behauptung folgt mit Lemma 9, $x_0 = 0$. ■

Beispiel 4

Für $0 < r < 1$ sei $p_r(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}$ $(x \in \mathbb{R})$, dann gilt: (Satz 9.2) $p_r\widehat{\ }(k) = r^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$, sowie

$$p_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \ (0 < r < 1, x \in \mathbb{R})$$

($\rightarrow$ geometrische Reihe)
Insbesondere ist $p_r(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$, und $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(u)du = p_r\widehat{\ }(0) = 1$ und $p_r\widehat{\ }(1) = r$. Somit ist $(p_r)_{r\in(0,1)}$ ein positiver Kern mit $\mathbb{A} = (0,1)$ und $\lim_{r\to 1-} p_r\widehat{\ }(1) = \lim_{r\to 1-} r = 1$. Wählt man $\rho_0 = 1$, dann folgt nach Lemma 10 für das zugehörige singuläre Integral $P_r f$:

$$\lim_{r\to 1-} \|P_r f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \ (f \in X_{2\pi})$$

$(p_r)_{r\in(0,1)}$ heißt *Abel-Poisson-Kern*, und $P_r f$ heißt *singuläres Integral von Abel-Poisson* oder *Abel-Poisson-Mittel* (der FR) von f. Nach Satz 9.3, 9.5 gilt für $f \in X_{2\pi}$ die Darstellung

$$(P_r f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)p_r(u)du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} f\widehat{\ }(k)e^{ikx} \ (0 < r < 1, x \in \mathbb{R})$$

1.6 Approximation durch Polynome in $L^p[a,b]$ $(1 \le p \le \infty)$

Definition 16

1. Für $-\infty < a < b < \infty$ ist $L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, der lineare Raum (von Äquivalenzklassen) meßbarer Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}^*)$, für die gilt:

$$\|f\|_{L^p[a,b]} \equiv \|f\|_p := \left\{ \int_a^b |f(u)|^p du \right\}^{1/p} < \infty$$

2. $L^\infty[a,b]$ ist der Raum (von Äquivalenzklassen) meßbarer Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}^*)$, die auf $[a,b]$ wesentlich beschränkt sind, d.h. für die gilt:

$$\|f\|_{L^\infty[a,b]} \equiv \|f\|_\infty := \text{wes}\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty$$

3. Für $-\infty < a < b < \infty$ ist $X[a,b]$ einer der Räume $C[a,b]$ oder $L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, mit der zugehörigen Norm.

4. Die Räume $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, mit der Norm $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \equiv \|f\|_p$ sind entsprechend definiert.
   Mit $C(\mathbb{R})$ wird der Raum der auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R}^*)$ bezeichnet. Dieser Raum wird mit der *Supremumsnorm* $\|f\|_{C(\mathbb{R})} \equiv \|f\|_C := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ versehen. $X(R) \equiv X$ steht für einen der Räume $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, oder $C(\mathbb{R})$.

5. Die Räume $C^{(r)}[a,b]$, $C^{(r)}(\mathbb{R})$ werden analog zu Definition 15.1 definiert.

Bemerkung 18 Anstelle von $L^p[a,b]$ schreiben wir auch $L^p(a,b)$. Die Sobolev-Räume $W^r_{L^p[a,b]}, W^r_{L^p(\mathbb{R})}$ werden erst später eingeführt.

Bemerkung 19 Für $-\infty < a < b < \infty$ sind die Normen $\|\cdot\|_{L^p[a,b]}$ ebenso wie $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ nicht mehr translationsinvariant. Die Normen $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R})}, \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ sind dagegen translationsinvariant.

$$\|f\|_{X_{2\pi}} = \|f(\cdot + h)\|_{X_{2\pi}}, \ \|f\|_{X(\mathbb{R})} = \|f(\cdot + h)\|_{X(\mathbb{R})}$$

$$\|f\|_{C[a,b]} \neq \|f(\cdot + h)\|_{C[a,b]} \text{ i.a. nicht definiert}$$

Approximationsproblem:
Existiert zu jedem $f \in L^p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$, eine Folge $(p_n)_{n=0}^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{L^p(a,b)} = 0$?

Satz 11
Ist $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f \in L^p(a,b), 1 \le p < \infty$, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C[a,b]$ mit $\|f-g\|_{L^p(a,b)} < \varepsilon$.
Beweis: mit L29 (L-Skript) ■

Bemerkung 20 Die Aussage gilt nicht für $p = \infty$, denn aus der Existenz eines $g \in C[a,b]$ mit $\|f-g\|_{L^\infty(a,b)} < \varepsilon$ würde wie im Beweis von Satz 8.2 die Stetigkeit im Mittel in $L^\infty(a,b)$ folgen, die aber nicht gilt.

Satz 12 (Weierstraß-Satz für $X[a,b]$)
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.

1. Zu jedem $f \in X[a,b]$ existiert eine Folge $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$, so daß
$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{X[a,b]} = 0$$
2. Es existiert ein $f \in L^\infty(a,b)$, zu dem es keine Folge $(p_n) \subset \mathcal{P}$ mit
$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{L^\infty(a,b)} = 0$$
gibt.

Beweis: Für $X[a,b] = C[a,b]$ siehe Satz 2. Sei jetzt $f \in L^p(a,b)$, $1 \le p < \infty$. Nach Satz 11 existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $g_j \in C[a,b]$ mit $\|f - g_j\|_p < 1/j$. Nach Satz 2 existiert zu $j \in \mathbb{N}$ ein $q_j \in \mathcal{P}$ mit $\|g_j - q_j\|_p \le (b-a)^{1/p}\|g_j - q_j\|_C < 1/j$. Damit ist $\|f - q_j\|_p \le \|f - g_j\|_p + \|g_j - q_j\|_p < 2/j \to 0$. Es gilt noch nicht: $q_j \in \mathcal{P}_j \ \forall j \in \mathbb{N}$. Konstruiere jetzt eine Folge $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_n - f\|_p = 0$. Setze dazu $q_0 := 0$, und konstruiere Folge $(n_j)_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N}_0$ mit $n_0 = 0$ und $n_j < n_{j+1} \ \forall j \in \mathbb{N}_0$, sowie $q_j \in \mathcal{P}_{n_j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$. (Hat man $n_0, n_1, ..., n_j$ gefunden, dann setze $n_{j+1} := \max\{n_j +$

$1, (j+1)'\}$ mit $(j+1)'$:=höchste in q_{j+1} vorkommende Potenz). Es gilt dann $n_{j+1} > n_j$ und $q_{j+1} \in \mathcal{P}_{(j+1)'} \subseteq \mathcal{P}_{n_{j+1}}$. Die Folge $(p_n)_0^\infty$ definiert man jetzt durch:

$$p_n = q_j \quad \text{für } n_j \leq n < n_{j+1},\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Man prüft leicht nach, daß $p_n \in \mathcal{P}_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - p_n\|_p = \lim\limits_{j\to\infty} \|f - q_j\|_p = 0$.

2.) vgl. Bemerkung 20. ∎

1.7 Approximation holomorpher Funktionen durch Polynome

Definition 17
Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann heißt

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ (z \in \mathbb{C})$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ ein (algebraisches) *Polynom* einer komplexen Variablen vom Grad n. Die Menge alle derartigen Polynome vom Grad n wird mit $\mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. $\mathcal{P}^{\mathbb{C}} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$.

Bezeichnung $D_\rho := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < \delta\}$, $D = D_1, \overline{D} = \overline{D_1}$. K_τ sei der positiv orientierte Kreis um 0 mit Radius τ. Ist $A \subset \mathbb{C}$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, dann ist $\|f\|_{C(A)} := \sup\limits_{z\in A} |f(z)|$.

<u>*Approximationsproblem*</u>:
Existiert zu jedem $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *holomorph* auf D und stetig auf $\overline{D}$ eine Folge von Polynomen $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{C(\overline{D})} = 0$?

Bemerkung 21 Es hat keinen Sinn, nur die Stetigkeit von f auf $\overline{D}$ zu fordern, denn aus der gleichmäßigen Konvergenz von (p_n) gegen f folgt sofort, daß f holomorph auf D ist.

Cauchy-Integralformel
Sei G ein *Gebiet* (offen und zusammenhängend) und f holomorph auf G. Ist C eine rektifizierbare, geschlossene, positiv orientierte Jordankurve, die samt ihrem Inneren in G enthalten ist, dann gilt für jeden Punkt z aus dem Inneren von C:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \ (k \in \mathbb{N}_0)$$

Lemma 11
Ist $1 < \tau < \rho$ und f holomorph auf D_ρ, dann gilt für alle $z \in D$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k| \leq \sup_{|\xi|=\tau} |f(\xi)| \frac{1}{\tau - 1} \tau^{-n}$$

Bemerkung 22 Ersetzt man im oben formulierten Problem die Forderung „holomorph auf D“ und „stetig auf $\overline{D}$“ durch „holomorph auf D_ρ für ein $\rho > 1$“, dann erhält man sofort eine positive Antwort aufgrund von Lemma 11.

Beweis (Lemma 11)
Wir benötigen folgende Identität (Beweis mit Induktion):

$$(*) \quad \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi}\sum_{k=0}^{n}(\frac{z}{\xi})^k + \frac{1}{\xi - z}(\frac{z}{\xi})^{n+1} \; (z, \xi \in \mathbb{C}, z \neq \xi, \xi \neq 0)$$

Mit der Cauchy-Formel für $k = 0$ und $C = K_\tau$ sowie $(*)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\tau}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\tau}\frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}}d\xi\Big)z^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\tau}\frac{f(\xi)}{\xi - z}(\frac{z}{\xi})^{k+1}d\xi \end{aligned}$$

Auf die Integrale in der Summe wenden wir wieder die Cauchy-Formel an und erhalten

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_\tau}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}(\frac{z}{\xi})^{n+1}d\xi$$

Schätze Integral ab: Beachte dazu, daß für $z \in D$, d.h. $|z| < 1$ und ξ auf dem Kreis K_τ, d.h. $|\xi| = \tau$ gilt:

$$|\frac{z}{\xi}| \le \frac{1}{\tau}, \;\; \frac{1}{|\xi - z|} \le \frac{1}{|\xi| - |z|} \le \frac{1}{\tau - 1}$$

Damit folgt:

$$|\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\tau}\frac{f(\xi)}{\xi - z}(\frac{z}{\xi})^{n+1}d\xi| \le \frac{1}{2\pi}\sup_{|\xi|=\tau}|f(\xi)|\frac{1}{\tau - 1}\frac{1}{\tau^{n+1}} \cdot 2\pi\tau \;\blacksquare$$

Satz 13
Zu jeder Funktion $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, die holomorph auf D und stetig auf $\overline{D}$ ist, existiert eine Folge $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - p_n\|_{C(\overline{D})} = 0$.
Beweis: Setze $\rho_n := 1 + \frac{1}{\log(2+n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f_n(z) := f(\frac{z}{\rho_n})$. f_n ist holomorph auf D_{ρ_n}. Ist nun $p_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n}(f_n)^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{k!} \cdot z^k$, dann ist $p_n \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$ und

$$|f(z) - p_n(z)| \le |\underbrace{f(z) - f_n(z)}_{=:A_n}| + |\underbrace{f_n(z) - p_n(z)}_{=:B_n}|$$

Wir zeigen:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|_{C(\overline{D})} = 0$,

(β) $\lim\limits_{n\to\infty}\|B_n\|_{C(\overline{D})} = 0$.

Zu (α): Da f stetig auf $\overline{D}$ ist, ist f dort sogar gleichmäßig stetig. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$, so daß $|f(z) - f(w)| < \varepsilon \; \forall z, w \in \overline{D}$ mit $|z - w| < \delta$. Nun gilt für alle $n > e^{1/\delta}$ (> 1) und $z \in \overline{D}$:

$$\begin{aligned} |z - \tfrac{z}{\rho_n}| &= |z||1 - \frac{1}{\rho_n}| \leq \frac{\rho_n - 1}{\rho_n} \\ &= \frac{[\log(2+n)]^{-1}}{1 + [\log(2+n)]^{-1}} = \frac{1}{1 + \log(2+n)} \leq \frac{1}{\log(2+n)} \\ &\leq_{n>1} \frac{1}{\log n} < \frac{1}{\log e^{1/\delta}} = \delta \end{aligned}$$

Somit folgt für alle $z \in \overline{D}$ (beachte: $\frac{z}{\rho_n} \in \overline{D}$):

$$A_n(z) = |f(z) - f(\frac{z}{\rho_n})| < \varepsilon \; (n > e^{1/\delta})$$

Damit ist (α) gezeigt.
Zu β: Setze $\tau_n := 1 + \frac{1}{\log(3+n)}$, dann gilt: $1 < \tau_n < \rho_n$, und mit Lemma 11 folgt:

$$\begin{aligned} B_n(z) &\leq \sup_{|\xi| = \tau_n} |f_n(\xi)| \frac{1}{\tau_n^n(\tau_n - 1)} = \sup_{|\xi| = \tau_n} |f(\frac{\rho}{\rho_n})\frac{1}{\tau_n^n(\tau_n - 1)} \\ &\leq \|f\|_{C(\overline{D})} \cdot \frac{1}{\tau_n^n(\tau_n - 1)} \end{aligned}$$

Zeige noch, daß $\frac{1}{\tau_n^n(\tau_n - 1)} \to 0 \; (n \to \infty)$. ∎

Bemerkung 23 Mit Hilfe der Transformation $w = rz + z_0$ kann man Satz 13 auch für Kreise mit beliebigem Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ beweisen.

Satz 14 (Walsh)
Sei G das Innere einer rektifizierbaren Jordankurve C, und sei f holomorph auf G und stetig auf $\overline{G} := G \cup C$, dann existiert eine Folge $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \|f - p_n\|_{C(\overline{G})} = 0.$$

Bemerkung 24 Mit Satz 14 kann man die Cauchy-Integralformel oder den Cauchy-Integralsatz dahingehend verschärfen, daß C der Rand des Holomorphiegebietes sein darf, wenn f stetig auf $G \cup C$ ist. Ist C ein Kreis, dann kann man dies auch mit Satz 13 beweisen.

Satz 15 (Mergelyan, 1951)
Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Ist f stetig auf K und holomorph auf dem Inneren von K, dann existiert eine Folge $(p_n)_0^\infty$, $p_n \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{C}}$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \|f - p_n\|_{C(K)} = 0.$$

1.8 Approximation durch Splines in $C[a,b]$

Im folgenden sei immer $[a,b]$ ein kompaktes Intervall, $k \in \mathbb{N}$, $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine *Zerlegung* von $[a,b]$, d.h. $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$; $I_j,\ j = 0,1,2,...,k-1$ seien die durch die Zerlegung erzeugten Teilintervalle von $[a,b]$, im einzelnen:

$$I_j := [x_j, x_{j+1}),\ j = 0,...,k-2, \qquad I_{k-1} := [x_{k-1}, x_k]$$

Definition 17

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

   $$\mathcal{PP}_n(\Delta) := \{s : [a,b] \to \mathbb{C};\ \exists p_j \in \mathcal{P}_n \text{ mit } s(x) = p_j(x) \text{ für } x \in I_j,\ j = 0,...,k-1\}$$

   die Menge der *stückweisen Polynome* vom Grad n zur Zerlegung Δ. (*piecewise polynomials*)

2. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

   $$S_n(\Delta) := \begin{cases} \mathcal{PP}_0(\Delta), & n = 0 \\ \mathcal{PP}_n(\Delta) \cap C^{(n-1)}[a,b], & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   die Menge der (polynomialen) *Splines* vom Grade n (mit einfachen Knoten $x_1, ..., x_{k-1}$).

Bemerkung 25

1. Für $n \geq 1$ ist $S_n(\Delta) \subset C[a,b]$ und $s \in S_n(\Delta)$ stimmt dann sogar auf jedem abgeschlossenen Intervall $[x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0,...,k-1)$ mit einem Polynom vom Grad n überein.

2. $\mathcal{PP}_n \cap C^n[a,b] = \mathcal{P}_n$, d.h. $S_n(\Delta)$ ist die „kleinstmögliche“ Verallgemeinerung von $\mathcal{P}_n$.

$S_n(\Delta)$ ist ein linearer Vektorraum über $\mathbb{C}$. Welche Dimension hat $S_n(\Delta)$?

Zur Erinnerung:
Lemma 12

1. Ist $(a,b) \subset \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu (x-c)^\nu = 0,\ x \in (a,b)$, dann ist $c_\nu = 0$ für alle $\nu = 0,1,...,n$.

2. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $((x-c)^\nu)_{\nu=0}^n$ eine Basis für $\mathcal{P}_n$, insbesondere ist $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$.

Wegen $\mathcal{P}_n \subset S_n(\Delta)$ gilt natürlich $\dim S_n(\Delta) \geq n+1$. Formal erhält man die Dimension von $S_n(\Delta)$ durch Abzählen der Freiheitsgrade: Wir haben k Polynome vom Grad n, das ergibt $k(n+1)$ Freiheitsgrade. Wir haben in jedem Knoten n Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitsbedingungen, wodurch $(k-1)n$ Freiheitsgrade gebunden werden. ($k - 1 = \#$ Knoten). Es bleiben also

$$k(n+1) - (k-1)n = kn + k - kn + n = n + k = (n+1) + (k-1)$$

Freiheitsgrade ($\dim \mathcal{P}_n + \#$ Knoten).

Lemma 13
Ist $n \in \mathbb{N}$, dann existiert zu $s \in S_n(\Delta)$ ein $\widetilde{s} \in S_{n-1}(\Delta)$ mit

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \widetilde{s}(u)du + s(x_0),\ x \in [a,b]$$

Beweis: Ist $n \geq 2$, dann ist $s \in C^{(1)}[a,b]$, und man kann $\widetilde{s} = s'$ wählen.
Ist $n = 1$, dann stimmt s auf jedem Intervall $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, ..., k-1$ mit einem Polynom $q_j \in \mathcal{P}_1$ überein. Sei also

$$s(x) = q_j(x) = \alpha_j x + \beta_j \quad (x \in [x_j, x_{j+1}],\ j = 0, ..., k-1)$$

Setze jetzt $\widetilde{s}(u) := \alpha_j$ $(u \in U_j,\ j = 0, ..., k-1)$ und $g(x) := \int_{x_0}^{x} \widetilde{s}(n)du + s(x_0)$ $(x \in [a,b])$.
Offensichtlich ist $\widetilde{s} \in \mathcal{P}_0(\Delta) = \mathcal{PP}_0$. Zeige noch, daß $g = s$ gilt. Sei dazu $x \in \mathcal{I}_j$ für ein $j = 0, ..., k-1$. Dann ist

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{j-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \widetilde{s}(u)du + \int_{x_j}^{x} \widetilde{s}(u)du + s(x_0)$$

Nun ist aber $s_\nu := s|_{[x_\nu, x_{\nu+1}]} \in C^{(1)}[x_\nu, x_{\nu+1}]$ für $\nu = 0, ..., k-1$ und $s'_\nu(x) = q'_\nu(x) = \alpha_\nu = \widetilde{s}(x)$ für $x \in I_\nu$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{\nu=0}^{j-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} s'_\nu(u)du + \int_{x_j}^{x} s'_j(u)du + s(x_0) \\ &= \sum_{\nu=0}^{j-1} (s_\nu(x_{\nu+1}) - s_\nu(x_\nu)) + s_j(x) - s_j(x_j) \ + s(x_0) \\ &=_? \sum_{\nu=0}^{j-1} (s(x_{\nu+1}) - s(x_\nu)) + s(x) - s(x_j) \ + s(x_0) \\ &= s(x_j) - s(x_0) + s(x) - s(x_j) + s(x_0) = s(x) \end{aligned}$$

Zum „?“: Beachte $s_\mu(x_{\mu+1}) = s(x_{\mu+1}),\ s_\mu(x_\mu) = s(x_\mu)$ und $s_j(x) = s(x)$, da $x \in I_j$. ■

Lemma 14
Ist $s \in S_n(\Delta)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, dann besitzt s die Darstellung

$$s(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (x - x_0)^\nu + \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu (x - x_\mu)_+^n$$

$(x \in [a,b])$ mit geeigneten $c_\nu, d_\mu \in \mathbb{C}$ und

$$(x-y)_+^n := \begin{cases} (x-y)^n, & x \geq y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Induktion über n.
$n = 0$: Sei also $s \in S_0(\Delta) = \mathcal{PP}_0$, d.h. es existieren $\alpha_j \in \mathbb{C}$ mit $s(x) = \alpha_j$ für $x \in I_j$, $j = 0, ..., k-1$. Zeige: $s(x) = h(x),\ x \in [a,b]$ mit $h(x) := x_0 + \sum_{\mu=1}^{k-1}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1})(x - x_\mu)_+^0\ (x \in [a,b])$
Sei $x \in I_j$ für ein $j = 0, ..., k-1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{j}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1})\underbrace{(x - x_\mu)_+^0}_{=1, \text{ da } x \geq x_\mu} + \sum_{\mu=j+1}^{k-1}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1})\underbrace{(x - x_\mu)_+^0}_{=0, \text{ da } x < x_\mu} \\ &= \alpha_0 + \sum_{\mu=1}^{j}(\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}) = \alpha_0 + (\alpha_j - \alpha_0) = \alpha_j = s(x) \end{aligned}$$

$n \to n+1$: Ist $s \in S_{n+1}(\Delta)$, dann ist $s(x) = \int_{x_0}^x \widetilde{s}(u)du + s(x_0)\ (x \in [a,b])$ für ein $\widetilde{s} \in S_n(\Delta)$ (nach Lemma 13). Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_{x_0}^x [\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (u - x_0)^\nu + \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu (u - x_\mu)_+^n]du + s(x_0) \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \int_{x_0}^x (u - x_0)^\nu du + \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu \int_{x_0}^x (u - x_\mu)_+^n du \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_{x_0}^x (u - x_\mu)_+^n du = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x < x_\mu \\ \int_{x_\mu}^x (u - x_\mu)^n du = \frac{1}{n+1}(x - x_\mu)^{n+1}, & x \geq x_\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{n+1}(x - x_\mu)_+^{n+1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} \frac{c_\nu}{\nu+1}(x - x_0)^{\nu+1} + s(x_0) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \underbrace{\frac{d_\mu}{n+1}}_{d'_\mu}(x - x_\mu)_+^{n+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n+1} c'_\nu (x - x_0)^\nu + \sum_{\mu=1}^{k-1} d'_\mu (x - x_\mu)_+^{n+1} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Wegen $(x - x_0)^\nu \in S_n(\Delta)$ für $\nu = 0, 1, ..., n$ und $(x - x_\mu)_+^n \in S_n(\Delta)$ für $\mu = 1, ..., k-1$ folgt aus Lemma 14, daß $n + 1 \leq \dim S_n(\Delta) \leq n + k$.

Satz 16
Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\dim S_n(\Delta) = n + k$, und

$$\mathcal{B}^* := \{(x - x_0)^\nu;\ \nu = 0, ..., n\} \cup \{(x - x_\mu)_+^n;\ \mu = 1, ..., k-1\}$$

ist eine Basis.
Beweis: Wegen $\mathcal{B}^* \subseteq S_n(\Delta)$ und Lemma 14 ist nur noch die lineare Unabhängigkeit der Elemente von $\mathcal{B}^*$ zu zeigen. Sei dazu

$$(*) \quad \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (x - x_0)^\nu + \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu (x - x_\mu)_+^n = 0.$$

für $x \in [a,b]$. Dann ist $\sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu (x-x_0)^\nu = 0,\ x \in [x_0, x_1)$ ($\Rightarrow x < x_\mu\ \forall \mu$), und mit Lemma 12 folgt $c_\nu = 0, \nu = 0, 1, ..., n$. Aus $(*)$ erhalten wir damit

$$(**) \quad \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu (x-x_\mu)_+^n = 0,\ x \in [a,b].$$

Wir nehmen jetzt an, daß mindestens eines der $d_\mu \neq 0$ ist, und setzen $\mu_0 := \min\{\mu \in \{1, ..., k-1\} :\ d_\mu \neq 0\}$. Damit gilt:

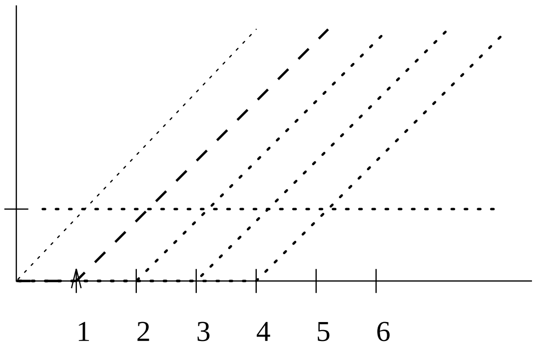
$$0 = \sum_{\mu=1}^{k-1} d_\mu (x-x_\mu)_+^n = \sum_{\mu=\mu_0}^{k-1} d_\mu (x-x_\mu)_+^n = d_{\mu_0}(x-x_{\mu_0})_+^n \ (x \in [x_{\mu_0}, x_{\mu_0+1}])$$

Es folgt $d_{\mu_0} = 0$, Widerspruch. Also $d_\mu = 0,\ \mu = 1, ..., k-1$ ■

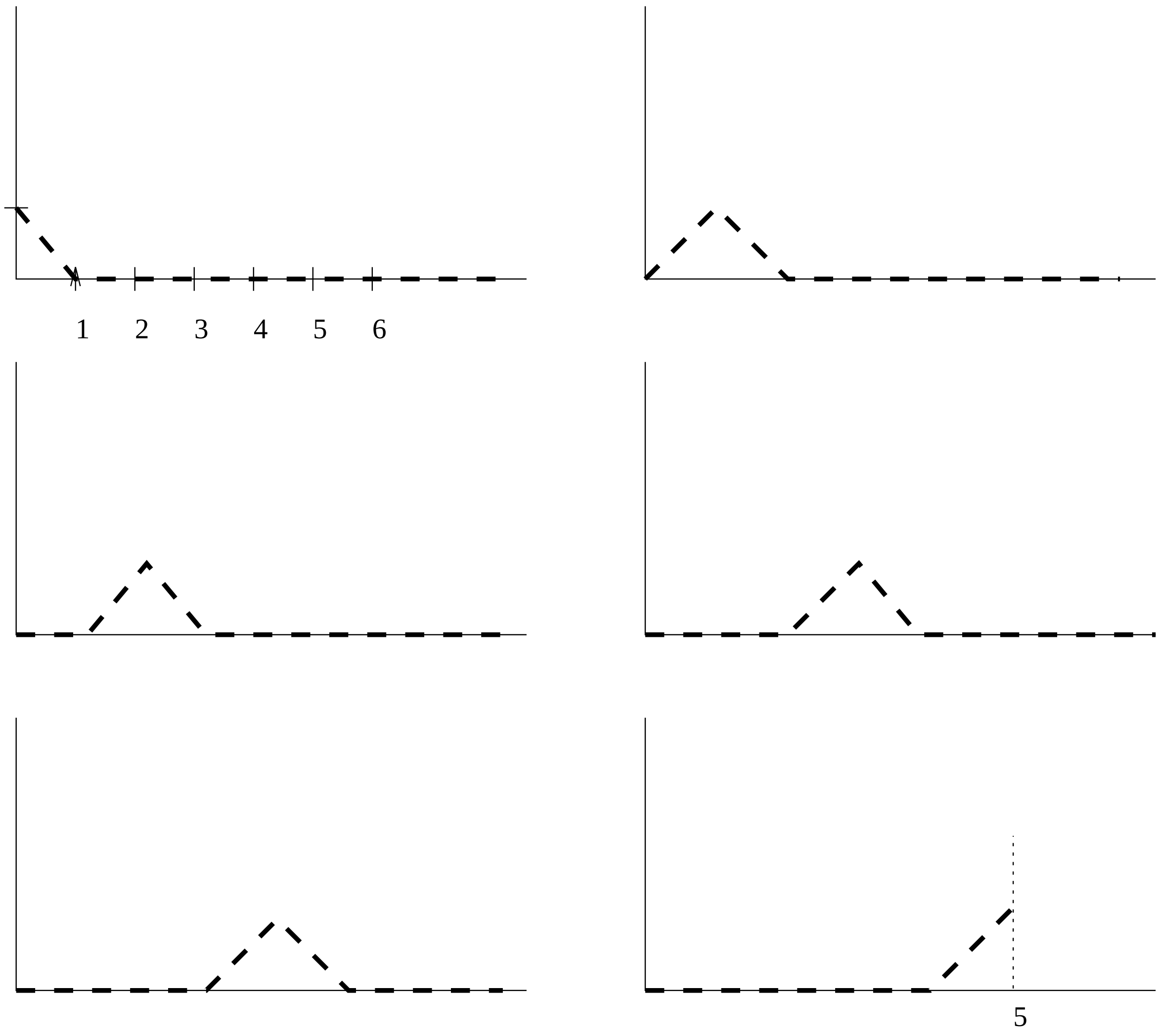
Beispiel 5
$[a, b] = [0, 5],\ \Delta = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},\ k = 5.$
Eine Basis für $S_1(\Delta)$ ist

$$\mathcal{B}^* = \{1, x, (x-1)_+, (x-2)_+, (x-3)_+, (x-4)_+\}.$$

$|\mathcal{B}^*| = 6 = 1 + 5 = n + k.$



Eine andere Basis ist $\mathcal{B} := ((1 - |x-j|)_+)_{j=0}^{5}$:



Berechne 50 Funktionswerte, 10 in jedem Teilintervall, von $s \in S_1(\Delta)$. Sei

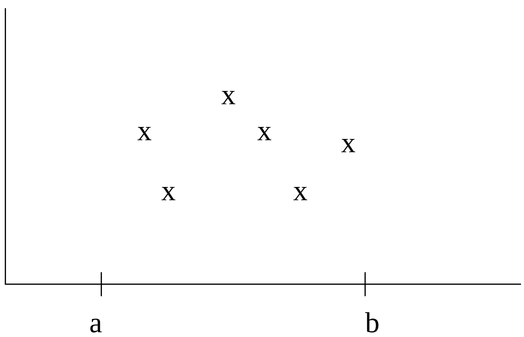
$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad s(x) &= \sum_{j=1}^{6} \alpha_j b_j^*(x) \text{ mit } \alpha_j \in \mathbb{C},\ b_j^* \in \mathcal{B}^* \\
\text{(II)} \quad s(x) &= \sum_{j=1}^{6} \beta_j b_j(x) \text{ mit } \beta_j \in \mathbb{C},\ b_j \in \mathcal{B}
\end{aligned}$$

Anzahl der Summanden $\neq 0$ in (I):
Für die 10 Funktionswerte in I_0: $10 \cdot 2 = 20$
Für die 10 Funktionswerte in I_1: $10 \cdot 3 = 30$
Für die 10 Funktionswerte in I_2: $10 \cdot 4 = 40$
Für die 10 Funktionswerte in I_3: $10 \cdot 5 = 50$
Für die 10 Funktionswerte in I_4: $10 \cdot 6 = 60$
Summe: 200

Anzahl der Summanden $\neq 0$ in (II):
Für die 10 Funktionswerte in I_0: $10 \cdot 2 = 20$
Für die 10 Funktionswerte in I_1: $10 \cdot 2 = 20$
Für die 10 Funktionswerte in I_2: $10 \cdot 2 = 20$
Für die 10 Funktionswerte in I_3: $10 \cdot 2 = 20$
Für die 10 Funktionswerte in I_4: $10 \cdot 2 = 20$
Summe: 100

Dies ist ein erster Hinweis, daß $\mathcal{B}$ günstiger ist als $\mathcal{B}^*$.

Was bedeutet der Name *Spline*?



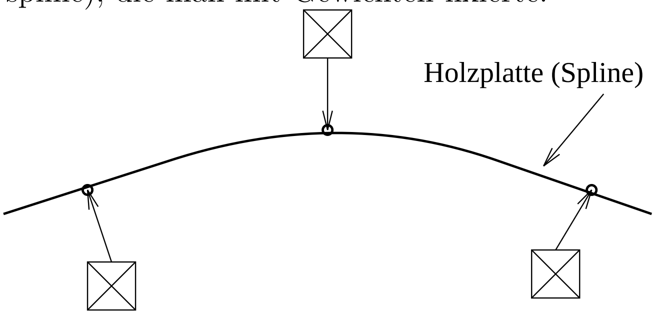
Gesucht: eine zweimal stetig differenzierbare Kurve y, die durch die Punkte geht, und für die

$$\|\kappa\|_2 := [\int_a^b |\kappa(t)|^2 dt]^{1/2}$$

minimal wird, wobei

$$\kappa(t) := \frac{y''(t)}{(1 + y'(t))^{1/2}} \quad \text{Krümmung von } y$$

Setzt man $\kappa(t) \approx y''(t)$, dann sucht man also eine Kurve $s \in C^2[a,b]$ mit $\|s''\|_2 = \min_{g \in C^2[a,b]} \|g''\|_2$. Man kann zeigen, daß gewisse *interpolierende kubische Splines* $s \in S_3(\Delta)$ dieses Minimalproblem lösen.
Zum Zeichnen einer solchen Kurve nahm man früher eine dünne Holzlatte (englisch: spline), die man mit Gewichten fixierte:



Definition 18
Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0,\ (t_j)_{j=0}^n \subset D$ mit $t_j \neq t_i$ für $j \neq i$. Dann heißt

$$[t_0, ..., t_n]f := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(t_j)}{\prod\limits_{i=0, i\neq j}^{n} (t_j - t_i)}$$

die n-te *dividierte Differenz* von f an den Knoten $t_0, ..., t_n$.

Beispiel 6

$$[t_0]f = f(t_0),\ [t_0, t_1]f = \frac{f(t_0)}{t_0 - t_1} + \frac{f(t_1)}{t_1 - t_0} = \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1}$$

Lemma 15 Seien $f, n, (t_j)$ wie in Definition 18.

1. Für jede Permutation $t_{j_0}, ..., t_{j_n}$ der t_j gilt: $[t_0, ..., t_n]f = [t_{j_0}, ..., t_{j_n}]f$
2. $$[t_0, ..., t_n]f = \frac{[t_0, ..., \widehat{t_i}, ..., t_n]f - [t_0, ..., \widehat{t_j}, ..., t_n]f}{t_j - t_i} \ (i \neq j,\ n \in \mathbb{N}),$$

   wobei die Knoten mit $\widehat{}$ weggelassen werden)
3. Ist $g : D \to \mathbb{C}$, dann gilt die *Leibnizregel*:

   $$[t_0, ..., t_n]fg = \sum_{j=0}^{n} [t_0, ..., t_j]f \cdot [t_j, ..., t_n]g$$

4. Sei $e_0(x) = 1, e_1(x) = x\ (x \in [a,b])$, dann gilt:

   $$[t_0]e_0 = 1,\ [t_0, ..., t_n]e_0 = 0\ \forall n \geq 1 \text{ und}$$
   $$[t_0]e_1 = t_0,\ [t_0, t_1]e_1 = 1,\ [t_0, ..., t_n]e_1 = 0\ \forall n \geq 2$$

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ und $g(x) := [t_0, ..., t_n]f(x, \cdot)$ (Differenz wird bezüglich $\cdot$ angewendet)
   (a) Ist $f(x,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ stetig in x_0 (als Funktion von x), d.h.
   $$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h, y) = f(x_0, y)\ \forall y \in \mathbb{R},$$
   dann ist g stetig in x_0.
   (b) Existiert $(D_x^r f)(x_0, y) := (\frac{\partial}{\partial x})^r f(x,y)|_{x=x_0}$ für ein $r \in \mathbb{N}$ und alle $y \in \mathbb{R}$, dann existiert auch $g^{(r)}(x_0)$, und es gilt
   $$g^{(r)}(x_0) = [t_0, ..., t_n](D_x^r f)(x_0, \cdot)$$

Beweis: 1), 2): Übung, 3),4) nachrechnen.
5) Für jedes j ist $f(x, t_j)$ stetig bzw. r-fach differenzierbar in x_0. Deshalb ist auch die n-te Differenz stetig bzw. r-fach differenzierbar in x_0. ■

Definition 19
Sei $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, und seien $y_j < y_{j+1} < ... < y_{j+n+1}$ Punkte in $\mathbb{R}$. Dann heißt
$$Q_j^n(x) := (-1)^{n+1}[y_j, ..., y_{j+n+1}](x - \cdot)_+^n\ (x \in \mathbb{R})$$
der *B-Spline* vom Grad n (zu den Knoten $y_j, ..., y_{j+n+1}$, und
$$N_j^n(x) := (y_{j+n+1} - y_j)Q_j^n(x)\ (x \in \mathbb{R})$$
heißt *normalisierter B-Spline* vom Grad n.

Beispiel 7
$$\begin{aligned} Q_j^0(x) &= (-1)[y_j, y_{j+1}](x - \cdot)_+^0 \\ &= (-1)\frac{(x-y_j)_+^0 - (x - y_{j+1})_+^0}{y_j - y_{j+1}} = (-1)\begin{cases} 0, & x < y_j \\ \frac{1}{y_j - y_{j+1}}, & y_j \le x < y_{j+1} \\ 0, & x \ge y_{j+1} \end{cases} \\ &= \frac{1}{y_{j+1} - y_j}\chi_{[y_j, y_{j+1})}(x) \\ N_j^0(x) &= \chi_{[y_j, y_{j+1})}(x) \end{aligned}$$

Satz 17
Für $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und $(y_\nu)_{\nu=j}^{j+n+1}$ wie in Definition 19 gilt:
$$Q_j^n(x) = \frac{(x - y_j)Q_j^{n-1}(x) + (y_{j+n+1} - x)Q_{j+1}^{n-1}(x)}{y_{j+n+1} - y_j}\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

Beweis:
$$Q_j^n(x) = (-1)^{n+1}[y_j, ..., y_{j+n+1}]\ \underbrace{(x-y)_+^n}_{(x-y)(x-y)_+^{n-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \sum_{\nu=j}^{j+n+1} \underbrace{[y_j, ..., y_\nu](x-y)}_{(*)}[y_\nu, ..., y_{j+n+1}](x-y)_+^n \quad \text{(Leibniz)} \\
&\quad \text{mit } (*) = \begin{cases} (x-y_j), & \nu = j \\ (1), & \nu = j+1 \\ 0, & \nu \geq j+2 \end{cases} \\
&= (-1)^{n+1}\{(x-y_j)[y_j, ..., y_{j+n+1}](x-y)_+^{n-1} \\
&\qquad - \underbrace{[y_{j+1}, ..., y_{j+n+1}](x-y)_+^{n-1}}_{(-1)^n Q_{j+1}^{n-1}(x)}\}
\end{aligned}
$$

Nun ist nach Lemma 15.2:

$$
\begin{aligned}
[y_j, ..., y_{j+n+1}](x-y)_+^{n-1} &= \frac{[y_j, ..., y_{j+n}](x-y)_+^{n-1} - [y_{j+1}, ..., y_{j+n+1}](x-y)_+^{n-1}}{y_j - y_{j+n+1}} \\
&= (-1)\frac{Q_j^{n-1}(x)(-1)^n - Q_{j+1}^{n-1}(x)(-1)^n}{y_{j+n+1} - y_j}
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
Q_j^n(x) &= \frac{(-1)^{n+2}}{y_{j+n+1} - y_j}\{(x-y_j)(-1)^{n+1}Q_j^{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(x-y_j)Q_{j+2}^{n-1}(x) \\
&\qquad + (y_{j+n+1} - y_j)Q_{j-1}^{n-1}(x)(-1)^{n+1}\} \\
&= \frac{1}{y_{j+n+1}}\{(x-y_j)Q_j^{n-1}(x) + (y_{j+n+1} - x)Q_{j+1}^{n-1}(x)\}
\end{aligned}
$$

Satz 18 Seien j, n und $(y_\nu)_{\nu=j}^{j+n+1}$ wie in Definition 19, dann gilt:

1. $Q_j^n(x) = 0$ für $x < y_j$ und $x \geq y_{j+n+1}$
2. $Q_j^n(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $Q_j^n(x) > 0$ für $x \in (y_j, y_{j+n+1})$
3. $Q_j^n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ $(n \neq 0)$
4. Q_j^n stimmt auf jedem Intervall $(-\infty, y_j)$, $[y_\nu, y_{\nu+1})$, $\nu = j, j+1, ..., j+n$; $[y_{j+n+1}, \infty)$ mit einem Polynom vom Grad n überein.

Beweis: 3. gilt wegen Lemma 15.3, da $(x-y)_+^n$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ als Funktion von x zu C^{n-1} gehört.
Die übrigen Aussagen beweist man durch Induktion über n, wobei man die Aussagen für $n = 0$ aus Beispiel 7 erhält und für den Induktionsschluß $(n-1 \to n)$ Satz 17 benutzt.

Bemerkung 26 Alle Aussagen von Satz 18 gelten auch für die N_j^n.

Bemerkung 27 Aus Satz 18.1, 18.2 folgt:

$$
\mathrm{Tr}(Q_j^n) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \ Q_j^n(x) \neq 0\}} = [y_j, y_{j+n+1}]
$$

(Träger). Ebenso gilt: $\mathrm{Tr}(N_j^n) = [y_j, y_{j+n+1}]$.

Lemma 16 (Mardsen-Identität)
Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$, und seien $y_{j-n} < y_{j-n+1} < \ldots < y_{j+m+n+1}$ Punkte in $\mathbb{R}$, dann gilt

$$(y-x)^n = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}(y) N_\nu^n(x) \quad (x \in [y_j, y_{j+m+1})\ )$$

mit $\varphi_{\nu,n}(y) := \prod_{\mu=1}^{n} (y - y_{\nu+\mu})$.
Beweis: $n = 0$: mit Beispiel 7 und $\varphi_{\nu,0} = 1$
$n-1 \to n$: Sei $x \in [y_j, y_{j+m+1})$.

$$\begin{aligned}
S \;&:= \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}(y) N_\nu^n(x) = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}(y)(y_{\nu+n+1} - y_\nu) Q_\nu^n > (x) \\
&= \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}(y)\{(x - y_\nu) Q_\nu^{n-1}(x) + (y_{\nu+n+1} - x) Q_{\nu+1}^{n-1}(x)\} \\
&= \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}(y)(x - y_\nu) Q_\nu^{n-1}(x) + \sum_{\nu=j-n+1}^{j+m+1} \varphi_{\nu-1,n}(y)(y_{\nu+n} - x) Q_\nu^{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Nun ist $Q_{j-\nu}^{n-1}(x) = 0$ für $x \geq y_{(j-n)+(n-1)+1} = y_j$ und $Q_{j+m+1}^{n-1}(x) = 0$ für $x < y_{j+m+1}$ $\Rightarrow$ Erster Term der ersten Summe und letzter Term der zweiten Summe sind 0. Deshalb haben wir

$$S = \sum_{\nu=j-(n-1)}^{j+m} Q_\nu^{n-1}(x) \underbrace{\{\varphi_{\nu,n}(y)(x - y_\nu) + \varphi_{\nu-1,n}(y)(y_{\nu+n} - x)\}}_{K}$$

Für K gilt wegen $\varphi_{\nu,n}(y) = \varphi_{\nu,n-1}(y)(y - y_{\nu+n})$ und $\varphi_{\nu-1,n}(y) = \varphi_{\nu,n-1}(y)(y - y_\nu)$, daß

$$K = \varphi_{\nu,n-1}(y)\{(y - y_{\nu+n})(x - y_\nu) + (y - y_\nu)(y_{\nu+n} - x)\} = \varphi_{\nu,n-1}(y)(y - x)(y_{\nu+n} - y_\nu)$$

Somit erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
S \;&= \underbrace{\sum_{\nu=j-(n-1)}^{j+m} \underbrace{Q_\nu^{n-1}(x)(y_{\nu+n} - y_\nu)}_{N_\nu^{n-1}(x)} \varphi_{\nu,n-1}(y)}_{(y-x)^{n-1} \ \text{(Induktionsvor.)}} \cdot (y - x) \\
&= (y-x)^{n-1} \cdot (y - x) \\
&= (y-x)^n \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 17
Seien $m, n, j, (y_\nu)_{\nu=j-n}^{j+m+n+1}$ wie in Lemma 16. Dann besitzt jedes $q \in \mathcal{P}_n$ eine Darstellung der Form

$$q(x) = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \alpha_\nu N_\nu^n(x) \quad (x \in [y_j, y_{j+m+1})\ )$$

mit geeigneten $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$. Insbesondere gilt: (*Zerlegung der Einheit*, *partition of unity*)

$$\sum_{\nu=j-n}^{j+m} N_\nu^n(x) = 1 \quad ((x \in [y_j, y_{j+m+1})\ )$$

Beweis: Setze $p(y) = (y-x)^n$, dann gilt für $0 \le \mu \le n$ nach Lemma 16:

$$p^{(\mu)}(0) = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \varphi_{\nu,n}^{(\mu)}(0) N_\nu^n(x) \quad (x \in [y_j, y_{j+m+1})\ )$$

Wegen $p^{(\mu)}(0) = n(n-1)...(n-\mu+1)(-1)^{n-\mu}x^{n-\mu}$ gilt mit $\mu = n-r$:

$$x^r = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} (-1)^r \frac{\varphi_{\nu,n}^{(n-r)}(0)}{n(n-1)...(r+1)} N_\nu^n(x) \quad (x \in [y_j, y_{j+m+1});\ r = 0,1,...,n)$$

Damit ist der erste Teil bewiesen. Für $r = 0$ folgt

$$1 = \sum_{\nu=j-n}^{j+m} \frac{1}{n!} \varphi_{\nu,n}^{(n)}(0) N_\nu^n(x)$$

Da $\varphi_{\nu,n}(y) = y^n +$ kleinere Potenzen von y, gilt $\varphi_{\nu,n}^{(n)}(0) = n!$, woraus der zweite Teil folgt. ■

Lemma 18
Seien $j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0, y_{j-n} < y_{j-n+1} < ... < y_{j+n+1}$ Punkte in $\mathbb{R}$ und $\emptyset \neq (c,d) \subset [y_j, y_{j+1})$. Ist

$$(*) \qquad \sum_{\nu=j-n}^{j} c_\nu N_\nu^n(x) = 0 \ (x \in (c,d)\ )$$

für gewisse $c_\nu \in \mathbb{C}$, dann gilt $c_\nu = 0, \nu = j-n, ..., j$.
Beweis: Die N_ν^n stimmen auf $[y_j, y_{j+1})$ mit einem Polynom $q_\nu \in \mathcal{P}_n$ überein. Somit folgt aus $(*)$:

$$\sum_{\nu=j-n}^{j} c_\nu N_\nu^n(x) = \sum_{\nu=j-n}^{j} c_\nu q_\nu(x) = 0 \ (x \in (c,d)\ )$$

Damit gilt sogar

$$(**) \qquad \sum_{\nu=j-n}^{j} c_\nu q_\nu(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R})$$

(Ist ein Polynom 0 auf einem Intervall, dann ist es das Nullpolynom.) Andererseits ist nach Lemma 17 jedes $q \in \mathcal{P}_n$ darstellbar als

$$q(x) = \sum_{\nu=j-n}^{j} \alpha_\nu N_\nu^n(x) = \sum_{\nu=j-n}^{j} \alpha_\nu q_\nu(x) \ (x \in [y_j, y_{j+1})\ )$$

Damit ist jedes $q \in \mathcal{P}_n$ darstellbar als Linearkombination der $(n+1)$ Polynome $q_{j-n}, ..., q_j$. Da $\dim \mathcal{P}_n = n+1$ ist, müssen die q_ν $(\nu = j-n, ..., j)$ linear unabhängig sein. Aus $(**)$ folgt damit $c_\nu = 0, \nu = j-n, ..., j$. ∎

Definition 20
Sei $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine Zerlegung eines Intervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ist $(t_\nu)_{\nu=0}^{2n+k} \subset \mathbb{R}$ (für $n \in \mathbb{N}_0$) derart, daß

$$\begin{aligned} &t_0 < t_1 < ... < t_n \leq a \\ &t_{n+1} = x_1 \\ &t_{n+2} = x_2 \\ &... \\ &t_{n+k-1} = x_{k-1} \\ &b \leq t_{n+k} < t_{n+k+1} < ... < t_{2n+k}, \end{aligned}$$

wobei im Fall $n=0$ der Punkt $t_k \equiv t_{n+k} > b$ zu wählen ist, dann heißt

$$\widetilde{\Delta} := (t_\nu)_{\nu=0}^{2n+k}$$

eine *erweiterte Zerlegung* vom Grad n zu Δ.

Bemerkung 28 Für $\nu \leq n$ und $\nu \geq n+k$ können die t_ν beliebig $\leq a$ bzw. $\geq b$ gewählt werden. Im Fall $n=0$ muß $t_k > b$ sein.

Das Ziel aller vorangegangen Lemmata ist der folgende Satz:

Satz 19
Ist $\widetilde{\Delta}$ eine erweiterte Zerlegung vom Grad n zu Δ, dann sind die normalisierten B-Splines $N_0^n, ..., n_{n+k-1}^n$, gebildet bezüglich der Punkte von $\widetilde{\Delta}$, eine Basis von $S_n(\Delta)$.
Beweis: Sei N_ν^n wie oben gegeben. Zeige: $N_\nu^n \in S_n(\Delta)$. Nach Satz 18 und Bemerkung 26 ist $N_\nu^n \in C^{(n-1)}[a,b]$ und $N_\nu^n = q_\nu \in \mathcal{P}_n$ für $x \in [t_m u, t_{\mu+1})$, $\mu = 0, ..., 2n+k-1$.
Zeige jetzt: $N_\nu^n = q_{\mu'}(x)$ für $x \in I_j, j = 0, ..., k-1$.
Ist $j = 0, ..., k-2$, dann ist

$$I_j = [x_j, x_{j+1}) \begin{cases} \subset [t_n, t_{n+1}), & j = 0 \\ = [t_{n+j}, t_{n+j+1}), & j \geq 1 \end{cases}$$

Damit ist aber $N_\nu^n(x) = q_{n+j}(x)$ für $j = 0, ..., k-2$.
Für $j = k-1$ ist $I_{k-1} = [x_{k-1}, x_k]$ (rechts abgeschlossen! $x_k = b$). Ist nun $n \geq 1$, dann ist $N_\nu^n(x) = q_{n+k-1}(x)$ für $x \in [t_{n+k-1}, t_{n+k}) \supset [x_{k-1}, x_k)$. Wegen der Stetigkeit von N_ν^n und q_{n+k-1} gilt aber sogar $N_\nu^n(x) = q_{n+k-1}(x),\ x \in [t_{n+k-1}, t_{n+k}] \supset [x_{k-1}, x_k] = I_{k-1}$. Ist $n = 0$, dann ist N_ν^n i.a. nicht stetig, und obiges Argument geht nicht mehr durch. In diesem Fall ist aber nach Definition von $\widetilde{\Delta}$

$$I_{k-1} = [x_{k-1}, x_k] \subset [\ \underbrace{t_{n+k-1}}_{=t_{k-1}=x_{k-1}}\ ,\ \underbrace{t_{n+k}}_{=t_k>b})$$

Die N_ν^n, $\nu = 0, 1, ..., n+k+1$ sind also $n+k = \dim S_n(\Delta)$ Funktionen aus $S_n(\Delta)$. Zeige noch die lineare Unabhängigkeit.
Sei also $\sum\limits_{\nu=0}^{n+k-1} c_\nu N_\nu^n(x) = 0$, $(x \in [a,b])$, und sei $n \leq j \leq n+k-1$, dann gilt

$$(*) \quad \Big(\sum_{\nu=0}^{j-n-1} + \sum_{\nu=j-n}^{j} + \sum_{\nu=j+1}^{n+k-1}\Big) c_\nu N_\nu^n(x) = 0 \ (x \in [a,b])$$

Sei jetzt $x \in (x_{j-n}, x_{j-n+1}) \subset [t_j, t_{j+1})$. Für $\nu \leq j-n-1$ ist $x \geq t_j \geq t_{\nu+n+1}$, d.h. $N_\nu^n(x) = 0$. Für $\nu \geq j+1$ ist $x < t_{j+1} \leq t_\nu$, d.h. $N_\nu^n(x) = 0$. Somit wird aus $(*)$

$$\sum_{\nu=j-n}^{j} c_\nu N_\nu^n(x) = 0 \ (x \in (x_{j-n}, x_{j-n+1})\ )$$

Aus Lemma 18 folgt $c_\nu = 0$ für $\nu = j-n, j-n+1, ..., j$. Da dies für alle $j = n, n+1, ..., n+k-1$ gilt, erhält man $c_\nu = 0$ für alle $\nu = 0, ..., n+k-1$. ■

Lemma 19
Seien $\Delta, \widetilde{\Delta}, (N_\nu^n)_{\nu=0}^{n+k-1}$ wie oben, dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n+k-1} N_\nu^n(x) = 1 \quad (x \in [a,b])$$

Beweis: Aus Lemma 17 mit $j = n, m = k-1$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n+k-1} N_\nu^n(x) = 1 \quad (x \in [t_n, t_{n+k})\ ).$$

Ist nun $n = 0$, dann gilt $[t_n, t_{n+k}) = [t_0, t_k) \supset [a,b]$, und alles ist klar. Ist dagegen $n \geq 1$, dann gilt i.a. nur $[t_n, t_{n+k}) \supset [a,b)$, d.h. aus $(*)$ folgt $\sum\limits_{\nu=0}^{n+k-1} N_\nu^n(x) = 1, x \in [a,b)$. Wegen der Stetigkeit der N_ν^n muß diese Aussage aber auch für $x = b$ gelten. ■

Bei der Approximation durch Polynome haben wir zu $f \in C[a,b]$ eine Folge von Polyomen $(p_n)_0^\infty$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$ konstruiert, für die galt: $\lim \|f - p_n\|_{C[a,b]} = 0$. Ähnlich für $L^p(a,b), C_{2\pi}, L_{2\pi}^p$. (Hier ging also der Polynomgrad $n \to \infty$.)
Wir wollen jetzt nach Folgen von Splines $(s_m)_{m=0}^\infty$ suchen mit $s_m \in S_n(\Delta_m)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \|s_m - f\|_{C[a,b]} = 0$. Dabei ist (Δ_m) eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit

$$\|\Delta_m\| := \max_{0 \leq \nu \leq k-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| \to 0,\ m \to \infty$$

(Fester Polynomgrad n, Zerlegungsindex $m \to \infty$. $k = k(m)$.)

<u>*Approximationsproblem*:</u>
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $(\Delta_m)_{m=0}^\infty$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\|\Delta_m\| \to 0$ für

$m \to \infty$. Existiert zu jedem $f \in C[a,b]$ eine Folge $(s_m)_{m=0}^{\infty}$ mit $s_m \in S_n(\Delta_m)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \|s_m - f\|_{C[a,b]} = 0$?

Satz 20
Sei $n \in \mathbb{N}_0, (\Delta_m)_{m=0}^{\infty}$ eine Folge von Zerlegungen $\Delta_m = (x_j)_{j=0}^{k(m)}$ von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} \|\Delta_m\| = 0$.
Zu jedem $f \in C[a,b]$ existiert eine Folge $(s_m)_{m=0}^{\infty}$ mit $s_m \in S_n(\Delta_m)$ und

$$\lim_{m\to\infty} \|f - s_m\|_{C[a,b]} = 0.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst eine feste Zerlegung $\Delta = (x_j)_{j=0}^{k}$, eine erweiterte Zerlegung $\widetilde{\Delta} = (t_\nu)_{\nu=0}^{2n+k}$ vom Grad n und die dazugehörigen B-Splines $(N_\nu^n)_{\nu=0}^{n+k-1}$. Außerdem wählen wir ein System von Punkten $\xi := (\xi_\nu)_{\nu=0}^{n+k-1}$ mit $\xi_\nu \in [t_\nu, t_{\nu+n+1}] \cap [a,b]$. Beachte $[t_\nu, t_{\nu+n+1}] \cap [a,b] \neq \emptyset$. Damit definieren wir einen Operator $A_{\widetilde{\Delta}} : C[a,b] \to S_n(\Delta)$ durch

$$(A_{\widetilde{\Delta}} f)(x) := \sum_{\nu=0}^{n+k-1} f(\xi_\nu) N_\nu^n(x) \quad (f \in C[a,b], x \in [a,b])$$

(Die Abhängigkeit des Operators von der Wahl von ξ wird hier nicht ausgedrückt.)
Es gilt für $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
|(A_{\widetilde{\Delta}} f)(x) - f(x)| &= \Big| \sum_{\nu=0}^{n+k-1} f(\xi_\nu) N_\nu^n(x) - f(x) \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n+k-1} N_\nu^n(x)}_{1,\ \text{La. } 19} \Big| \\
&\le \sum_{\nu=0}^{n+k-1} |f(x) - f(\xi_\nu)| N_\nu^n(x) \qquad (N_\nu^n \ge 0) \\
&= \sum_{\nu\in S_1} |f(x) - f(\xi_\nu)| N_\nu^n(x) + \sum_{\nu\in S_2} |f(x) - f(\xi_\nu)| N_\nu^n(x)
\end{aligned}$$

mit $S_1 := \{\nu \in \{0,...,n+k-1\} :\ x \in [t_\nu, t_{\nu+n+1}]\}$ und $S_2 := \{\nu \in \{0,...,n+k-1\} : x \notin [t_\nu, t_{\nu+n+1}]\}$. Ist jetzt $\nu \in S_2$, dann ist $x \notin [t_\nu, t_{\nu+n+1}]$, und wegen $\xi_\nu \in [t_\nu, t_{\nu+n+1}]$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(\xi_\nu)| &\le \sup_{y,y' \in [a,b]\cap[t_\nu, t_{\nu+n+1}]} |f(y) - f(y')| \\
&\le \sup_{y,y'\in[a,b],|y-y'|\le(n+1)\|\widetilde{\Delta}\|} |f(y) - f(y')|
\end{aligned}$$

Setzt man für $\delta > 0$

$$\omega(f;\delta) := \sup_{y,y'\in[a,b],|y-y'|\le\delta} |f(y) - f(y')|,$$

dann kann man die letzte Ungleichung schreiben als

$$|f(x) - f(\xi_\nu)| \le \omega(f;\ (n+1)\|\widetilde{\Delta}\|)$$

($\omega(f;\delta)$ heißt der *Stetigkeitsmodul* von f).
Damit gilt

$$\begin{aligned}|(A_{\widetilde{\Delta}}f)(x)-f(x)| &\le \omega(f;(n+1)\|\widetilde{\Delta}\|)\sum_{\nu\in S_1} N_\nu^n(x)\\ &\le \omega(f;(n+1)\|\widetilde{\Delta}\|)\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n+k-1} N_\nu^n(x)}_{1}\\ &= \omega(f;(n+1)\|\widetilde{\Delta}\|)\end{aligned}$$

Weiter gilt sogar: ($\sup_x$ bilden)

$$(*)\quad \|A_{\widetilde{\Delta}}f-f\|_{C[a,b]}\le \omega(f;(n+1)\|\widetilde{\Delta}\|).$$

Haben wir jetzt eine Folge von Zerlegungen $(\Delta_m)_{m=0}^\infty$ mit $\|\Delta_m\|\to 0$ und konstruieren ganz analog für jedes m die Operatoren $A_{\widetilde{\Delta}_m}$, dann gilt $A_{\widetilde{\Delta}_m}f\in S_n(\Delta_m)$ und

$$\|A_{\widetilde{\Delta}_m}f-f\|_{C[a,b]}\le \omega(f;(n+1)\|\widetilde{\Delta}_m\|)$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[a,b]$ gilt nun $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega(f;\delta)=0$, d.h. wegen $\|\widetilde{\Delta}_m\|\to 0$ folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 29 Die Ungleichung $(*)$ kann zu

$$\|A_{\widetilde{\Delta}}f-f\|_{C[a,b]}\le \omega(f;(n+1)\|\Delta\|).$$

(Δ ohne Tilde) verschärft werden.

2 Satz von Banach-Steinhaus

2.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Definition 1 Sei X ein normierter linearer Raum (NLR).

1. Die Menge $S_r(f_0):=\{f\in X;\ \|f-f_0\|_X<r\}$ heißt *offene Kugel* mit Mittelpunkt $f_0\in X$ und Radius $r>0$. $\overline{S_r(f_0)}:=\{f\in X;\ \|f-f_0\|_X\le r\}$ heißt *abgeschlossene Kugel.*

2. Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt *beschränkt,* falls ein $r>0$ existiert mit $\|f\|_X\le r$ für alle $f\in A$.

3. Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt *dicht* in X, falls zu jedem $f\in X$ und $\varepsilon>0$ ein $g\in A$ mit $\|f-g\|_X<\varepsilon$ existiert.

4. Eine Teilmenge $G \subset X$ heißt *fundamental* in X, falls die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus G dicht in X ist, d.h. falls

$$\text{span}G := \{f \in X;\ f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k,\ g_k \in G, n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in \Phi\}$$

dicht in X ist.

Beispiele:
Die Menge aller Polynome $\mathcal{P}$ ist dicht in $X[a,b]$ (Sätze 3, 12 in Kapitel 1). Ebenso ist Π dicht in $X_{2\pi}$ (Sätze 6, 8 in Kapitel 1). Außerdem ist $C[a,b]$ dicht in $L^p[a,b], 1 \leq p < \infty$ und $C_{2\pi}$ in $L^p_{2\pi}, 1 \leq p < \infty$, wegen $\mathcal{P} \subset C[a,b] \subset L^p(a,b)$, $\Pi \subset C_{2\pi} \subset L^p_{2\pi}$. Die Menge der *Monome* $\{x^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ ist fundamental in $X[a,b]$, und $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ oder $\{\cos kx; k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ sind fundamental in $X_{2\pi}$.

Definition 2 Seien X, Y LNR über demselben Körper Φ.

- Ein Operator (eine Abbildung) $T : X \to Y$ heißt *stetig* im Punkt $f_0 \in X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\|Tf_0 - Tf\|_Y < \varepsilon$ für alle $f \in X$ mit $\|f - f_0\|_X < \delta$.
- T heißt *stetig auf* X, falls T stetig in jedem Punkt von X ist.
- T heißt *gleichmäßig stetig* auf $A \subset X$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\|Tf - Tg\|_Y < \varepsilon$ für alle $f, g \in A$ mit $\|f - g\|_X < \delta$.
- T heißt *beschränkt*, falls
$$\sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} < \infty$$

Lemma 1 Seien X, Y wie in Definition 2.

1. Die Menge $[X,Y] := \{T : X \to Y; T \text{ ist linear und beschränkt}\}$ bildet einen linearen Raum unter der Addition
$$(S+T)(f) := Sf + Tf \quad (T, S \in [X,Y], f \in X)$$
und der skalaren Multiplikation
$$(\alpha T)(f) := \alpha T(f) \quad (T \in [X,Y], \alpha \in \Phi)$$

2. Die Abbildung $\|\cdot\|_{[X,Y]} : [X,Y] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$\|T\|_{[X,Y]} := \sup_{f \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}$$
ist eine Norm auf $[X,Y]$.

3. Ist $T \in [X, Y]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|T\|_{[X,Y]} &= \sup_{\|f\|_X \le 1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X = 1} \|Tf\|_Y = \sup_{\|f\|_X < 1} \|Tf\|_Y \\ &= \inf\{M \ge 0 : \ \|Tf\|_Y \le M\|f\|_X \text{ für alle } f \in X\} \end{aligned}$$

Definition 3
Ist Y ein Banach-Raum, dann ist auch $[X, Y]$ ein Banach-Raum. Für die Operatornorm $\|\cdot\|_{[X,Y]}$ gilt:

$$\|Tf\|_Y \le \|T\|_{[X,Y]}\|f\|_X \text{ für alle } f \in X,$$

und $\|T\|_{[X,Y]}$ ist die kleinste Zahl $M \ge 0$, für die gilt: $\|Tf\|_Y \le M\|f\|_X$.

Lemma 2 Seien X, Y wie in Definition 2 und $T : X \to Y$ linear. Äquivalent sind:

1. T ist stetig in (einem) $f_0 \in X$,
2. T ist gleichmäßig stetig auf X,
3. T ist beschränkt,
4. T bildet beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen ab.

Beweis: Übung.

2.2 Das UBP und der Satz von Banach-Steinhaus

Satz 1 (Uniform Boundedness Pinciple, UBP)
Sei $(T_\alpha)_{\alpha \in J}$ eine Familie beschränkter, linearer Operatoren von einem Banachraum X in einen LNR Y, d.h. $(T_\alpha)_{\alpha \in J} \subset [X, Y]$.
Falls für jedes $f \in X$ eine Konstante $M_f < \infty$ existiert, so daß

$$(*) \quad \|T_\alpha f\|_Y \le M_f \quad (\alpha \in J),$$

dann ist auch $(\|T_\alpha\|_{[X,Y]})_{\alpha \in J}$ beschränkt, d.h. es existiert eine (von f unabhängige) Konstante $M < \infty$ mit

$$\|T_\alpha f\|_Y \le M\|f\|_X.$$

Kurzform:

$$\left.\begin{array}{l} \|T_\alpha f\|_Y \le M_\alpha \|f\|_X \\ \|T_\alpha f\|_Y \le M_f \end{array}\right\} \Rightarrow \|T_\alpha f\|_Y \le M\|f\|_X \text{ unabh. von } \alpha, f$$

Beweis: Annahme: $(\|T_\alpha\|)_{\alpha \in J}$ nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(T_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_{\alpha_n}\| = \infty$. Setzt man $S_n := T_{\alpha_n}$, dann gilt:

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} \|S_n\| = \infty$$

Nach Lemma 1.3 gibt es eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset X$ mit

$$(2) \quad \|f_n\|_X = 1 \text{ und } \|S_n f_n\|_Y \ge \frac{1}{2}\|S_n\|$$

(siehe (i) unten). Wähle jetzt eine Zahlenfolge $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ mit

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty \text{ und } \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k \leq \frac{\alpha_j}{5} \ (j \in \mathbb{N})$$

(z.B. $\alpha_k = 6^{-k}$) Konstruiere jetzt eine Folge $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k, k \in \mathbb{N}$ und

$$(4) \quad \|S_{n_j}\| > \frac{5}{\alpha_j}(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k M_{f_{n_k}} + j) \ (j \in \mathbb{N}),$$

wobei $M_{f_{n_k}}$ die Schranke aus $(*)$ ist. (Zur Konstruktion dieser Folge siehe (ii).) Setze jetzt $g_m := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_{n_k}$ und definiere $g \in X$ durch $\lim_{m\to\infty} \|g_m - g\|_X = 0$. (Zur Existenz von g siehe (iii).)
Behauptung: $\|S_{n_j} g\|_Y \to \infty$ für $j \to \infty$. Dazu:
Zunächst gilt $\|S_{n_j} g\|_Y = \lim_{m\to\infty} \|S_{n_j} g_m\|_Y$ (siehe (iv)) und weiter

$$\begin{aligned}
\|S_{n_j} g_m\|_Y &= \|S_{n_j}(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k f_{n_k}) + S_{n_j}(\alpha_j f_{n_j}) + S_{n_j}(\sum_{k=j+1}^{m} \alpha_k f_{n_k})\|_Y \\
&\geq \|S_{n_j}(\alpha_j f_{n_j})\|_Y - \|S_{n_j}(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k f_{n_k})\|_Y - \|S_{n_j}(\sum_{k=j+1}^{m} \alpha_k f_{n_k})\|_Y \\
&=: I_1 - I_2 - I_3.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
I_1 &= \alpha_j \|S_{n_j} f_{n_j}\|_Y \geq_{(2)} \frac{\alpha_j}{2} \|S_{n_j}\| \\
I_2 &\leq \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k \|S_{n_j} f_{n_k}\|_Y \leq_{(*)} \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k M_{f_{n_k}} \\
&<_{(4)} \frac{\alpha_j}{5} \|S_{n_j}\| - j \\
I_3 &\leq \sum_{k=j+1}^{m} \alpha_k \|S_{n_j} f_{n_k}\|_Y \leq \sum_{k=j+1}^{m} \alpha_k \|S_{n_j}\| \underbrace{\|f_{n_k}\|_X}_{=1,(2)} \\
&= \|S_{n_j}\| \sum_{k=j+1}^{m} \alpha_k \leq \|S_{n_j}\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k \\
&\leq_{(3)} \|S_{n_j}\| \frac{\alpha_j}{5}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|S_{n_j} g_m\|_Y > \alpha_j \|S_{n_j}\| \underbrace{(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5})}_{1/10} + j = \alpha_j \|S_{n_j}\| \cdot \frac{1}{10} + j \ (\forall j \in \mathbb{N}, m \geq j)$$

Damit gilt auch ($m \to \infty$):

$$\|S_{n_j} g\|_Y \geq \underbrace{\alpha_j \|S_{n_j}\| \cdot \frac{1}{10}}_{\geq 0} + j \geq j \to \infty, \ j \to \infty$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, denn

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha g\| \geq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|S_{n_j} g\| = \infty.$$

(Zeige also noch (i)-(iv).)
Zu (i): Nach Lemma 1.3 ist $\|S_n\| = \sup\limits_{\|f\|_X = 1} \|S_n f\|_Y$. Nach Definition von sup existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $f_n \in X$ mit $\|f_n\| = 1$ und $\|S_n f_n\| \geq \|S_n\| - \varepsilon$. Ist $\|S_n\| > 0$, dann wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}\|S_n\| \Rightarrow \|S_n f_n\| \geq \frac{1}{2}\|S_n\|$. (für $\|S_n\| = 0$ ist nichts zu zeigen.)
Zu (ii): Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $\|S_{n_1}\| > \frac{5}{\alpha_1}$ (möglich nach (1).) Hat man $n_1 < n_2 < ... < n_j$ gefunden, dann wähle $n_{j+1} > n_j$ mit

$$\|S_{n_{j+1}}\| > \frac{5}{\alpha_{j+1}} (\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k M_{f_{n_k}} + j + 1)$$

(ebenfalls möglich wegen (1).)
Zu (iii): Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gilt:

$$\|g_n - g_m\|_X = \| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k f_{n_k} \|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \underbrace{\|f_{n_k}\|_X}_{1} < \varepsilon$$

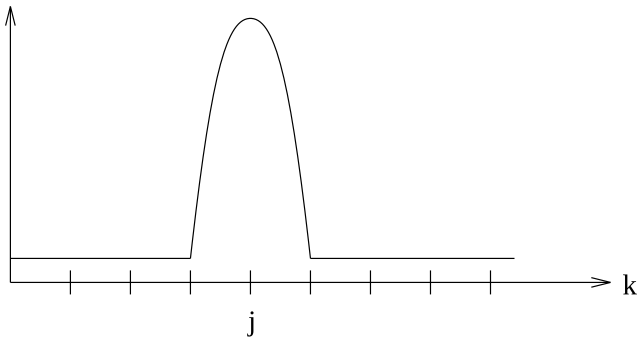
für $n, m \geq N(\varepsilon)$, da $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$.
Damit ist (g_m) eine Cauchy-Folge in X, und da X ein Banachraum ist (also **vollständig**!), existiert ein $g \in X$ mit $\lim\limits_{m \to \infty} \|g_m - g\|_X = 0$.
Zu (iv):

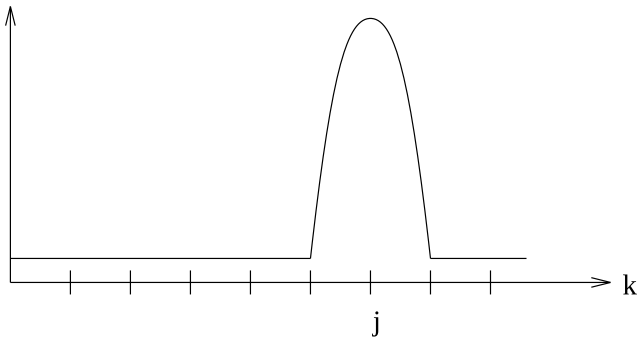
$$\begin{aligned} |\|S_{n_j} g\|_Y - \|S_{n_j} g_m\|_Y| &\leq \|S_{n_j} g - S_{n_j} g_m\|_Y \quad \text{(nach Bem. 1, Kap. 1)} \\ &= \|S_{n_j}(g - g_m)\|_Y \leq \|S_{n_j}\| \|g - g_m\|_X \to 0, m \to \infty. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Zur Beweismethode:
Schlüssel ist die Folge (n_k). Die Auswahl der n_k erfolgt so, daß $\|S_{n_j} f_{n_j}\|$ „groß“ ist und $\|S_{n_j} f_{n_k}\|$ „klein“ für $j \neq k$. Dabei bedeuten „groß“ und „klein“, daß

$$\frac{\alpha_j}{2} \|S_{n_j} f_{n_j}\| - \sum_{k=1, k \neq j}^{\infty} \alpha_k \|S_{n_j} f_{n_k}\| \to \infty \text{ für } j \to \infty$$

(vgl. Abschätzungen von I_1, I_2, I_3).
Für festes j kann man die Zahlenfolge $(\|S_{n_j} f_{n_k}\|)_{k=1}^{\infty}$ etwa so skizzieren:





Der Höcker (Buckel) gleitet mit j. Daher hat diese Beweismethode den Namen *Methode des gleitenden Höckers* (Buckels).
Anderer Beweis mit *Baire-Kategoriensatz*: Kürzer, aber viel Funktionalanalysis.

Satz 2 (Satz von Banach-Steinhaus, 1927)
Sei X ein Banach-Raum, Y ein NLR und $G \subset X$ eine Fundamentalmenge.

1. Ist $(T_n)_{n=0}^{\infty} \subset [X, Y]$ und $T \in [X, Y]$, dann gilt:

   (a) (α) $\|T_n\|_{[X,Y]} \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und
   (β) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n g - Tg\|_Y = 0$ $(g \in G)$
   genau dann, wenn

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n f - Tf\|_Y = 0$ $(f \in X)$

2. Sei $\mathbb{A} = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $\rho_0 = b$, und seien $(T_\rho)_{\rho \in \mathbb{A}} \subset [X, Y], T \in [X, Y]$. Dann gilt:

   (a) (α) Es existiert ein $\rho^* \in (a, b)$ mit $\|T_\rho\| \leq M$ $(\rho \in (\rho^*, b)$)
   (β) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|T_\rho g - Tg\| = 0$ $(g \in G)$
   genau dann, wenn

   (b) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|T_\rho f - Tf\| = 0$ $(f \in X)$

   Eine entsprechende Aussage gilt für $\rho_0 = a$.

Beweis: Zu Teil 1):
(a) $\Rightarrow$ (b): Wir zeigen zunächst

$$(\beta') \quad \lim_{n\to\infty} \|T_n h - Th\|_Y = 0 \ (h \in \operatorname{span} G)$$

Sei dazu $h = \sum_{k=1}^{m} c_k g_k$ mit $c_k \in \Phi, g_k \in G$. Dann gilt

$$\|T_n h - Th\|_Y = \|\sum_{k=1}^{m} c_k(T_n g_k - Tg_k)\|_Y \leq \sum_{k=1}^{m} |c_k|\|T_n g_k - Tg_k\|_Y \to 0, n \to \infty.$$

Um (b) zu zeigen, wählen wir zu $f \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $h \in \operatorname{span} G$ mit $\|f - h\|_X < \varepsilon$ (möglich, da $\operatorname{span} G$ dicht in X ist). Es folgt

$$\begin{aligned}
\|T_n f - Tf\| &\leq \|T_n f - T_n h\| + \|T_n h - Th\| + \|Th - Tf\| \\
&= \|T_n(f-h)\| + \|T(f-h)\| + \|T_n h - Th\| \\
&\leq \|T_n\|\|f-h\| + \|T\|\|f-h\| + \|T_n h - Th\| \\
&\leq (M + \|T\|)\varepsilon + \|T_n h - Th\|
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus $\limsup_{n\to\infty} \|T_n f - Tf\| \leq (M + \|T\|)\varepsilon$, also $\lim_{n\to\infty} \|T_n f - Tf\| = 0$.
(b) $\Rightarrow$ (a): (β) klar. Zu (α): Sei $f \in X$ und $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\|T_n f\| - \|Tf\|| \leq \|T_n f - Tf\| < 1$ für $n > N$ (Bemerkung 1, Kapitel 1). Setzt man noch $\widetilde{M_f} := \max_{0\leq n\leq N} \|T_n f\|$, dann gilt $\|T_n f\| \leq 1 + \|Tf\| + \widetilde{M_f} =: M_f$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Damit ist die Bedingung $(*)$ aus Satz 1 (UBP) (mit $J = \mathbb{N}_0$) erfüllt, und es folgt, daß die Operatornormen $\|T_n\|$ beschränkt sind, also (a)(α).
Zu Teil 2):
(a) $\Rightarrow$ (b) wie in Teil 1). Zu (b) $\Rightarrow$ (a): (β) ist wieder klar. Zu (α): Wie in Teil 1) erhält man zunächst:
$(*)$ Für jede Folge $(\rho_j)_{j=1}^{\infty} \subset (a,b)$ mit $\lim_{j\to\infty} \rho_j = \rho_0$ ist die Folge der Operatornormen $(\|T_{\rho_j}\|)_{j=1}^{\infty}$ beschränkt.
Annahme: (α) sei nicht erfüllt, d.h. zu jedem $\rho^* \in (a,b)$ und $M > 0$ gibt es ein $\rho' \in (\rho^*, b)$ mit $\|T_{\rho'}\| > M$. Wähle jetzt eine Folge $(\rho_j^*)_{j=1}^{\infty}$ mit $\lim_{j\to\infty} \rho_j^* = \rho_0$, dann existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $\rho_j \in (\rho_j^*, b)$ mit $\|T_{\rho_j}\| > j$. Wegen $|\rho_j - \rho_0| \leq |\rho_j^* - \rho_0| \to 0$ gilt $\lim_{j\to\infty} \rho_j = \rho_0$. Aber im Widerspruch zu $(*)$: $\lim_{j\to\infty} \|T_{\rho_j}\| = \infty$. ∎

Bemerkung 2 In den Beweisen (a)$\Rightarrow$(b) wird die Voraussetzung, daß X ein Banachraum ist, nicht benötigt. Diese Implikation gilt deshalb für beliebige NLR X. Wir werden Satz 2 meistens für den Fall benötigen, wo $X = Y$ und $T = Id$ ist.

Folgerung 1

1. Sei X ein Banachraum, $G \subset X$ eine Fundamentalmenge und $(T_n)_{n=0}^{\infty} \subset [X]$. Es gilt

   (a) (α) $\|T_n\|_{[X]} \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und
   (β) $\lim_{n\to\infty} \|T_n g - g\|_X = 0$ $(g \in G)$
   genau dann, wenn

   (b) $\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_X = 0$ $(f \in X)$

2. Seien X, G wie oben, $\mathbb{A} = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $\rho_0 = b$. Ist $(T_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}} \subset [X]$, dann gilt:

   (a) (α) Es existiert ein $\rho^* \in (a, b)$ mit $\|T_\rho\|_{[X]} \leq M$ $(\rho \in (\rho^*, b)\ )$
   (β) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|T_\rho g - g\|_X = 0$ $(g \in G)$
   genau dann, wenn

   (b) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|T_\rho f - f\|_X = 0$ $(f \in X)$.

Beispiel 1: Kantorovic-Polynome (Übung)

$$(P_n f)(x) := (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt, \quad f \in X(0,1),\ x \in [0,1]$$

mit $X = L^p$ oder $X = C$, $p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$.
Es gilt: $P_n : X[0,1] \to X[0,1]$ linear (sogar $\to C[0,1]$), und (i) $\|P_n f\|_{X[0,1]} \leq \|f\|_{X[0,1]}$ (Übung), (ii) $(P_n f)(x) = \frac{d}{dx}(B_{n+1}F)(x)$ mit B_{n+1} = Bernsteinoperator und $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ (Übung).
Aus (i) folgt $\|P_n\|_{[X[0,1]]} \leq 1$, und aus (ii) für alle Monome $x^k, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}\|(P_n u^k)(x) - x^k\|_{X[0,1]} &= \|\frac{d}{dx}(B_{n+1}\frac{u^{k+1}}{k+1})(x) - x^k\|_{X[0,1]} \\ &\leq_{(*)} \|\frac{d}{dx}(B_{n+1}\frac{u^{k+1}}{k+1})(x) - x^k\|_{C[0,1]} \to 0 \text{ für } n \to \infty,\end{aligned}$$

da $\|(B_n g)' - g\|_{C[0,1]} \to 0$ für $g \in C^1[0,1]$ (Übung).
(zu $(*)$: $\|h\|_{X[0,1]} \leq \|h\|_{C[0,1]}$ für $h \in C[0,1]$)
Mit Folgerung 1 erhält man daraus $\|P_n f - f\|_{X[0,1]} \to 0$ für alle $f \in X[0,1]$, da $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Fundamentalmenge in $X[0,1]$ ist (vergleiche Beispiele nach Definition 1)

Vergleich: Bohman-Korovkin und Banach-Steinhaus

	Vorteile	Nachteile
Bohman-Korovkin	Nur 3 (2) Testfunktionen, keine explizite Bedingung an die Operatornorm	Nur für positive Operatoren, nur in $C[a,b]$ und $C_{2\pi}$
Banach-Steinhaus	Für beliebige lineare Operatoren, für beliebige LNR (BR)	i.a. ∞ viele Testfunktionen, Operatornormen müssen überprüft werden

2.3 Anwendungen von Banach-Steinhaus auf periodische Faltungsintegrale

Satz 3
Ist $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein periodischer Kern, dann definiert das Faltungsintegral $I_\rho f := f * \chi_\rho$,

$\rho \in \mathbb{A}$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren von $X_{2\pi}$ in sich, und für die Operatornormen gilt:

$$(*) \quad \|I_\rho\|_{[X_{2\pi}]} \leq \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_{L^1_{2\pi}} \ (\rho \in \mathbb{A}).$$

Beweis: Ist $f \in X_{2\pi}$, dann ist $I_\rho f \in X_{2\pi}$ nach Lemma 7, Kapitel 1. Die Abbildung $I_\rho : X_{2\pi} \to X_{2\pi}$ ist offensichtlich linear, und es gilt nach Lemma 6, Kapitel 1:

$$\|I_\rho f\|_{X_{2\pi}} = \|\chi_\rho * f\|_{X_{2\pi}} \leq \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1 \|f\|_{X_{2\pi}},$$

woraus sofort die Abschätzung $(*)$ für die Operatornorm folgt. ∎

Folgerung 2

Ist $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein Kern mit (i) $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$ $(\rho \in \mathbb{A})$ und (ii) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \chi_\rho\widehat{\ }(k) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$, dann gilt

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f \in X_{2\pi})$$

d.h. $(I_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ bildet einen Approximationsprozeß auf $X_{2\pi}$.

Beweis: Wir wenden Folgerung 1 (a)⇒(b) auf die Operatoren $I_\rho : X_{2\pi} \to X_{2\pi}$ an. Aus $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$ folgt mit Satz 3 sofort: $\|I_\rho\| \leq M$. Zu zeigen bleibt noch: $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho g - g\|_{X_{2\pi}} = 0$ $(g \in G)$, wobei G fundamental in $X_{2\pi}$ ist. Wir wählen $G := \{e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}\}$ (vgl. Beispiel nach Definition 1). Zeige also:

$$\|(I_\rho e^{iku}(\cdot) - e^{ik\cdot}\|_{X_{2\pi}} \to 0$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}(I_\rho e^{iku})(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-u)}\chi_\rho(u)du = e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\chi_\rho(u)du \\ &= e^{ikx}\chi_\rho\widehat{\ }(k)\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|(I_\rho e^{iku}(\cdot) - e^{ik\cdot}\|_{X_{2\pi}} &= \|e^{ik\cdot}(\chi_\rho\widehat{\ }(k) - 1)\|_{X_{2\pi}} \\ &= |\chi_\rho\widehat{\ }(k) - 1| \underbrace{\|e^{ik\cdot}\|_{X_{2\pi}}}_{\begin{cases} = 2\pi^{1/p}, & X_{2\pi} = L^p_{2\pi} \\ = 1, & X_{2\pi} = C_{2\pi}\end{cases}} \to 0 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Beispiel 2: de la Vallée-Poussin-Mittel, delayed means

$$v_{n,m}(x) := (1 + \frac{m}{n+1-m})F_n(x) - \frac{m}{n+1-m}F_{m-1}(x) = \frac{\sin\frac{n+1+m}{2}x \cdot \sin\frac{n+1-m}{2}x}{(n+1-m)\sin^2\frac{x}{2}}$$

$(m, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq m \leq n,\ F_n$ Fejér-Kern)

Spezialfälle: $m = 0 \Rightarrow v_{0,n} = F_n$; $m = n \Rightarrow v_{n,n} = D_n$ *Dirichlet-Kern.* Es gilt:

$$v_{n,m}\widehat{\ }(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq m \\ 1 - \frac{|k|-m}{n+1-m}, & m \leq |k| \leq n \\ 0, & |k| \geq n+1 \end{cases}$$

und

$$\|v_{m,n}\|_1 \leq (1+\frac{m}{n+1-m})\underbrace{\|F_n\|_1}_{2\pi}+\frac{m}{n+1-m}\underbrace{\|F_{m-1}\|_1}_{2\pi} = 2\pi(1+\frac{2m}{n+1-m})$$

Wählt man jetzt m in Abhängigkeit von n so, daß $\frac{2m}{n+1-m}$ beschränkt bleibt und $\lim\limits_{n\to\infty} v_{m,n}\widehat{\ }(k) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$, dann erzeugen die $v_{m,n}$ einen Approximationsprozeß (Folgerung 2). Häufig wählt man $m = [\frac{n}{2}]+1$ (Gaußklammer), dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$1+\frac{2m}{n+1-m} = 1+\frac{2[\frac{n}{2}]+2}{n+1-[\frac{n}{2}]-1} \leq 1+\frac{n+2}{n/2} = 1+\frac{2n+4}{n} = 3+\frac{4}{n} \leq 7$$

(gilt auch für $n=0$). Natürlich gilt dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} v_{m,n}\widehat{\ }(k) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$. Ist $V_{[n/2]+1,n}f$ das zugehörige Faltungsintegral, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|V_{[n/2]+1,n}f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f \in X_{2\pi})$$

Lemma 3

1. Für $f \in L^p_{2\pi}, 1 \leq p \leq \infty$ und q definiert durch $1/p+1/q=1$ gilt

$$\|f\|_p = \sup\{|\int_{-\pi}^{\pi} fg|,\ g \in L^q_{2\pi}, \|g\|_q = 1\}$$

2. Für $f \in L^1_{2\pi}$ gilt

$$\|f\|_1 = \sup\{|\int_{-\pi}^{\pi} fg|,\ g \in C_{2\pi}, \|g\|_{C_{2\pi}} = 1\}$$

(Beachte: $\{g \in C_{2\pi}, \|g\|_{C_{2\pi}} = 1\} \subsetneq \{g \in L^\infty_{2\pi}, \|g\|_\infty = 1\}$!)
Beweis: 1) Für $p=\infty$ (Rest: Übung)
Sei also $f \in L^\infty_{2\pi}$, dann gilt mit der Hölder-Ungleichung für $g \in L^1_{2\pi}$ mit $\|g\|_1 = 1$:

$$|\int fg| \leq \int |fg| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 = \|f\|_\infty$$

Damit folgt

$$\sup\{|\int fg|;\ g \in L^1_{2\pi}, \|g\|_1 = 1\} \leq \|f\|_\infty$$

Für die Umkehrung sei $\|f\|_\infty > 0$ (sonst alles klar) und $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$. Setze $E := \{x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Dann ist $m(E) > 0$, denn sonst wäre das $\operatorname{wes\,sup}|f(x)| \leq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Da f periodisch ist, ist auch $m(E \cap [-\pi,\pi]) > 0$. Setze

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{m(E \cap [-\pi,\pi])}\chi_E(x)(\operatorname{sgn} f)(x)$$

$(x \in \mathbb{R})$, wobei

$$(\operatorname{sgn} f)(x) := \begin{cases} \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x) = |f(x)|$. g_ε ist meßbar (f meßbar $\Rightarrow E$ meßbar $\Rightarrow \chi_E$ meßbar), 2π-periodisch, und wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon| = \frac{1}{m(E \cap [-\pi,\pi])} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(x)dx}_{m(E\cap[-\pi,\pi])} = 1$$

ist $g_\varepsilon \in L^1_{2\pi}$ mit $\|g_\varepsilon\|_1 = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_g |\textstyle\int fg| \ &\geq |\int fg_\varepsilon| = \frac{1}{m(E\cap[-\pi,\pi])}\int |f|\chi_E \\ &\geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot \underbrace{\frac{1}{m(E\cap[-\pi,\pi])}\int \chi_E}_{1} = \|f\|_\infty - \varepsilon \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, erhält man daraus die gewünschte Ungleichung.
Zu 2): Nutze die Tatsache, daß $C_{2\pi}$ dicht in $L^\infty_{2\pi}$ ist. ■

Satz 4
Ist $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein Kern, dann gilt

$$\|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]} = \|I_\rho\|_{[C_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1 \quad (\rho \in \mathbb{A})$$

Achtung: Satz 5 gilt *nicht* für $L^p_{2\pi}, 1 < p < \infty$!
Beweis: Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit Lemma 1.3:

$$\begin{aligned} \|I_\rho\|_{[C_{2\pi}]} &= \sup_{\|f\|_{C_{2\pi}}=1} \|I_\rho f\|_{C_{2\pi}} \geq \sup_f |(I_\rho f)(x)| \\ &= \sup_{f\in C_{2\pi}:\|f\|_{C_{2\pi}}=1} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(x-u)f(u)du\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho(x-\cdot)\|_1 = \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1 \quad \text{(Lemma 3.2)} \end{aligned}$$

Damit ist $\|I_\rho\|_{[C_{2\pi}]} \geq \frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1$, „$\leq$“ gilt nach Satz 3, also „$=$“.
Bezüglich $\|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]}$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|\chi_\rho\|_1 &= \|\chi_\rho(\cdot - x)\|_1 = \sup_{\|h\|_\infty=1} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u-x)h(u)du\right| \\ &\leq \sup_{\|h\|_\infty=1} \left\|\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u-\cdot)h(u)du\right\|_\infty \\ &= \sup_{\|h\|_\infty=1}\ \sup_{\|f\|_1=1} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u-x)h(u)du\right\} f(x)dx\right| \quad (\text{Lemma 3.1, } p=\infty) \\ &= \sup_{\|h\|_\infty=1}\ \sup_{\|f\|_1=1} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \chi_\rho(u-x)f(x)dx}_{2\pi(f*\chi_\rho)(u)}\, h(u)du\right| \quad \text{(Fubini)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \sup_{\|h\|_\infty=1} \sup_{\|f\|_1=1} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(I_\rho f)(u)}_{\in L^1} \underbrace{h(u)}_{\in L^\infty} du \Big| \\
&\leq 2\pi \sup_{\|h\|_\infty=1} \sup_{\|f\|_1=1} \|I_\rho f\|_1 \underbrace{\|h\|_\infty}_{1} \\
&= \sup_{\|f\|_1=1} 2\pi \|I_\rho f\|_1 = 2\pi \|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]}
\end{aligned}
$$

Es folgt $\frac{1}{2\pi}\|\chi_\rho\|_1 \leq \|I_\rho\|_{[L^1_{2\pi}]}$, und die Umkehrung folgt mit Satz 3. ■

Folgerung 3

1. Ist $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Kern, dann gilt
   (a) $\|\chi_n\|_1 \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_n\widehat{\ }(k) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$
   genau dann, wenn
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \|I_n f - f\|_{C_{2\pi}} = 0$ $(f \in C_{2\pi})$
2. Ist $\mathbb{A} = (a, b)$ und $(\chi_\rho)_{\rho\in\mathbb{A}}$ ein Kern, dann gilt
   (a) Es existiert ein $\rho^* \in (a, b)$ mit $\|\chi_\rho\|_1 \leq M$ $(\rho \in (\rho^*, b)$ bzw. $\rho \in (a, \rho^*)$ $)$ und $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \chi_\rho\widehat{\ }(k) = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$
   genau dann, wenn
   (b) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0} \|I_\rho f - f\|_{C_{2\pi}} = 0$ $(f \in C_{2\pi})$
3. Die Aussagen von Teil 1 und 2 gelten ebenfalls für $L^1_{2\pi}$ anstelle von $C_{2\pi}$.

Beweis: Zu 1.: Die Richtung (a)⇒(b) erhält man aus Folgerung 2. Für die Umkehrung erhält man aus Folgerung 1 zunächst $\|I_n\|_{[C_{2\pi}]} \leq M'$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, und mit Satz 4 erhält man dann $\|\chi_n\|_1 \leq M$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Die Aussage für die Fourier-Koeffizienten folgt schließlich wegen

$$|\chi_n\widehat{\ }(k) - 1| = \|(I_n e^{iku})(\cdot) - e^{ik\cdot}\|_{C_{2\pi}} \to 0$$

(vergleiche Beweis zu Folgerung 2).
Zu 2., 3.: analog. ■

Lemma 4

1. Der Operator S_n, definiert durch

$$(S_n f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} f\widehat{\ }(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ein beschränkter linearer Operator von $X_{2\pi}$ nach $\Pi_n \subset X_{2\pi}$; er hat die Darstellung

$$(S_n f)(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du$$

mit

$$D_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+1/2)u}{\sin u/2}$$

Insbesondere ist

$$\|S_n\|_{[C_{2\pi}]} = \|S_n\|_{[L^1_{2\pi}]} = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1, \ \|S_n\|_{[L^p_{2\pi}]} \leq \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1 \quad (1 < p < \infty)$$

2. Es gilt $\frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1 = \frac{4}{\pi}\log n + O(1)$ $(n \to \infty)$, d.h. $(D_n)_0^\infty$ ist ein Kern, aber keine approximierende Identität.

3. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t_n \in \Pi_n$ gilt $S_n t_n = t_n$.

Bemerkung 3 $(D_n)_0^\infty$ heißt *Dirichlet-Kern.* Die Zahlen $\frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1$ heißen *Lebesgue-Konstanten.* Die Eigenschaft 3. heißt *Projektionseigenschaft.* S_n heißt deshalb auch *Projektionsoperator.*

Beweis (Lemma 4)
$S_n f$ ist wohldefiniert für alle $n \in \mathbb{N}_0, f \in X_{2\pi}$. S_n ist linear, und $S_n f \in \Pi_n$. Setzt man $D_n(u) := \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{iku}$, dann gilt

$$\begin{aligned}(f * D_n)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)e^{iku}du = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{ik(x-u)}du \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du}_{=f\hat{}(k)}\, e^{ikx} = (S_n f)(x)\end{aligned}$$

Die anderen Darstellungen von D_n zeigt man mit $e^{iku} = \cos ku + i \sin ku$ bzw. vollständiger Induktion. Wegen $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum du = 1$ ist (D_n) ein Kern, und die Aussagen über die Operatornormen folgen aus Satz 3 und Satz 4.
Benutze bei 3. Satz 9.3 und 9.4 (Kapitel 1) ■

$\to f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f\hat{}(k)e^{ikx}$

Satz 5

1. **Satz von DuBois-Reymond, 1876**
   Es gibt ein $f \in C_{2\pi}$, dessen Fourier-Reihe nicht gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. die Partialsummen S_n der Fourier-Reihe bilden *keinen* Approximationsprozeß auf $C_{2\pi}$. Darüberhinaus gibt es ein $g \in C_{2\pi}$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \|S_n g\|_{C_{2\pi}} = \infty$.

2. Es gibt ein $f \in L^1_{2\pi}$, dessen Fourier-Reihe nicht in der $L^1_{2\pi}$-Norm gegen f konvergiert, d.h. die Partialsummen S_n der Fourier-Reihe bilden keinen Approximationsprozeß auf $L^1_{2\pi}$. Außerdem existiert ein $g \in L^1_{2\pi}$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \|S_n g\|_1 = \infty$.

Beweis: Mit Lemma 4.2 und Folgerung 3 erhält man, daß (S_n) kein Approximationsprozeß auf $C_{2\pi}$ oder $L^1_{2\pi}$ ist. Für die $\limsup$-Aussage nehmen wir an, daß $\limsup \|S_n g\|_{C_{2\pi}} < \infty$ $(g \in C_{2\pi})$. Dann gilt auch $\|S_n g\|_{C_{2\pi}} \leq M_g < \infty$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Mit dem UBP folgt sofort $\|S_n\|_{[C_{2\pi}]} \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was im Widerspruch zu Lemma 4 steht. Ebenso in $L^1_{2\pi}$. ∎

Bemerkung 4 Satz 5 gilt *nicht* in $L^p_{2\pi}$ $(1 < p < \infty)$. Die Partialsummen aller Fourier-Reihen bilden einen Approximationsprozeß auf $L^p_{2\pi}, 1 < p < \infty$. Für $p = 2$ später in dieser Vorlesung. Für $p \neq 2$: *Darstellungssatz von M. Riesz*. Es gilt also insbesondere: $\|S_n\|_{[L^p_{2\pi}]} \leq M,\ n \in \mathbb{N}_0$.

3 Lagrange- und Hermite-Interpolation

3.1 Lagrange-Interpolation

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Punkte $(x_j)_0^n \subset \mathbb{R}$ sowie $y_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, ..., n$.
Gesucht ist ein Polynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ mit

$$(*) \quad p_n(x_j) = y_j \quad (j = 0, ..., n)$$

Satz 1
Das oben geschilderte Problem besitzt eine eindeutige Lösung, die durch

$$\begin{aligned} p_n(x) &:= \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \ell_k(x) &:= \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (0 \leq k \leq n;\ x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

gegeben ist.
Beweis: Es gilt $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ und $\ell_k(x_j) = \delta_{kj}, 0 \leq j, k \leq n$. Damit ist $p_n \in \mathcal{P}_n$ und $p_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k \delta_{kj} = y_j$, $0 \leq j \leq n$. Also ist p_n eine Lösung des Problems. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $q_n \in \mathcal{P}_n$ eine zweite Lösung. Es gilt $p_n(x_j) - q_n(x_j) = 0, 0 \leq j \leq n$. Damit hat $p_n - q_n \in \mathcal{P}_n$ $n+1$ Nullstellen und muß deshalb das Nullpolynom sein. ∎

Folgerung 1
Seien $(x_j)_0^n$ paarweise verschiedene Punkte in einem Intervall $[a, b]$, und sei $f \in C[a, b]$, dann existiert genau ein $p_n \in \mathcal{P}_n$ mit

$$p_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, ..., n.$$

Bemerkung 1 Das Polynom p_n aus Folgerung 1 heißt das *Lagrange-Interpolationspolynom* vom Grad n zu f mit den *Stützstellen* (Knoten) $(x_j)_0^n$. Die ℓ_k heißen die

Lagrange-Fundamentalpolynome zu den Stützstellen (x_j).

Definition 1
Seien $(x_j)_0^n$ paarweise verschiedene Punkte in $[a,b]$ und $\ell_k,\ 0 \le k \le n$ die zugehörigen Fundamentalpolynome. Dann heißt der Operator L_n, definiert durch

$$(L_n f)(x) \equiv L_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x) \quad (f \in C[a,b], x \in [a,b])$$

der *Lagrange-Interpolationsoperator* oder kurz *Lagrange-Operator* zu den Stützstellen $(x_j)_0^n$. Will man die Abhängigkeit des Operators L_n von den Stützstellen andeuten, dann schreibt man auch $L_n(f, x_0, ..., x_n;\ x)$.

Bemerkung 2 Der Lagrange-Operator ordnet also jedem $f \in C[a,b]$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom aus Folgerung 1 zu, d.h. es gilt $(L_n f)(x_j) = f(x_j), j = 0, ..., n$.

Lemma 1

1. Sei (x_j) wie oben, dann ist der zugehörige Lagrange-Operator L_n ein beschränkter linearer Operator von $C[a,b]$ in sich mit

$$\|L_n\|_{[C[a,b]]} \le \|\sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|\|_{C[a,b]}.$$

2. Der Operator L_n ist polynomial vom Grad n und erfüllt
(i) $L_n p_n = p_n$ $(p_n \in \mathcal{P}_n)$ (Projektionseigenschaft)
(ii) $L_n(L_n f)) = L_n f$ $(f \in C[a,b])$ (Idempotenz: $L_n^2 = L_n$)

Beweis:

1. Es ist klar, daß L_n eine lineare Abbildung von $C[a,b]$ in $\mathcal{P}_n \subset C[a,b]$ ist. Außerdem gilt für $f \in C[a,b]$ mit $\|f\|_C = 1$:

$$\|L_n f\|_C = \|\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ell_k(x)\|_C \le \|\sum_{k=0}^{n} \underbrace{|f(x_k)|}_{\le 1} \cdot |\ell_k(x)|\|_C \le \|\sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|\|_C$$

Daraus folgt die Abschätzung für die Operatornorm.

2. Sei jetzt $p_n \in \mathcal{P}_n$. Dann ist $L_n p_n - p_n \in \mathcal{P}_n$, $(L_n p_n)(x_j) - p_n(x_j) = 0, j = 0, ..., n$. Damit hat $L_n p_n - p_n$ $n+1$ Nullstellen, und somit ist $L_n p_n - p_n = 0$, woraus (i) folgt. (ii) folgt dann mit $p_n = L_n f$. ■

Frage: $(L_n f)(x) - f(x) =?,\ x \ne x_j$

Lemma 2
Seien $(x_j)_0^n$ wie oben Punkte in $\mathbb{R}$, und seien die *Knotenpolynome* ω_k, $k = 0, ..., n+1$ definiert durch

$$\omega_0 = 1 \text{ und } \omega_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^{k}(x - x_j), \; x \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$(*) \quad \ell_k(x) = \begin{cases} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x)}, & x \neq x_k \\ 1, & x = x_k \end{cases}$$

für $0 \leq k \leq n$.
Beweis: Sei q die rechte Seite von $(*)$, dann ist q für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, da ω_{n+1} bei $x = x_k$ eine einfache Nullstelle hat und somit $\omega'_{n+1}(x_k) \neq 0$ ist. Außerdem gilt $q(x) = p_n(x)$ für $x \neq x_k$ mit $p_n \in \mathcal{P}_n$. Wegen

$$\lim_{x \to x_k} q(x) = \lim_{x \to x_k} \frac{\omega_{n+1}(x) - \overbrace{\omega_{n+1}(x_k)}^{0}}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} = \omega'_{n+1}(x_k) \cdot \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)} = 1$$

ist q stetig in x_k, und deshalb ist $q(x) = p_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $q \in \mathcal{P}_n$. Da ebenfalls $\ell_k \in \mathcal{P}_n$ und $q(x_j) = \ell_k(x_j) = 0$ für $k \neq j$ und $q(x_k) = \ell_k(x_k) = 1$, folgt wie oben mit dem Fundamentalsatz der Algebra, daß $q = \ell_k$. ∎

Satz 2
Seien (x_j) paarweise verschiedene Punkte in $[a, b]$, und sei $f \in C[a, b]$, so daß $f^{(n+1)}(x)$ auf (a, b) existiert, dann gibt es zu $x \in [a, b]$ ein $\xi = \xi(f, x; x_0, ..., x_n) \in (a, b)$ mit

$$R_n(f; x) := f(x) - (L_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

Beweis: Die Aussage ist richtig für $x = x_j$, $j = 0, ..., n$, da dann $R_n(f; x_j) = 0 = \omega_{n+1}(x_j)$ ist. Sei jetzt $x \neq x_j$ und

$$\varphi(t) := R_n(f; t) - \frac{\omega_{n+1}(t)}{\omega_{n+1}(x)} R_n(f; x)$$

$(t \in [a, b])$. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert, da $\omega_{n+1}(x) \neq 0$. Außerdem ist $\varphi(t) = 0$ für $t = x, x_0, ..., x_n$. Wende jetzt den Satz von Rolle auf die von $x, x_0, ..., x_n$ erzeugten Teilintervalle von $[a, b]$ an, dann folgt, daß φ' in (a, b) $n+1$ verschiedene Nullstellen hat. Ebenso hat φ'' n verschiedene Nullstellen in (a, b) usw. $\varphi^{(n+1)}$ hat mindestens eine Nullstelle in (a, b). Sei ξ diese Nullstelle, dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi^{(n+1)}(\xi) = (\frac{d}{dt})^{n+1}\{R_n(f; t) - \frac{R_n(f; x)}{\omega_{n+1}(x)}\omega_{n+1}(t)\}|_{t=\xi} \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{(L_n^{(n+1)} f)}_{0}(t) - \frac{R_n(f; x)}{\omega_{n+1}(x)} \underbrace{\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi)}_{(n+1)!}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

Folgerung 2
Mit den Bezeichnungen aus Satz 2 gilt für $f \in C^{(n+1)}[a,b]$:

$$\|L_n f - f\|_{C[a,b]} \le \frac{\|\omega_{n+1}\|_{C[a,b]}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]}$$

Problem 1 Für welche Wahl der Knoten (x_j) wird $\|\omega_{n+1}\|_{C[a,b]}$ minimal?
Antwort: Für x_j = Nullstellen der *Tschebyscheff-Polynom*e (nächster Abschnitt)

Problem 2 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien $(n+1)$ Knoten gegeben:

$$\begin{array}{lllll} x_{00} & & & & \\ x_{01} & x_{11} & & & \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & & \\ \cdots & & \cdots & & \\ x_{0n} & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \\ \cdots & & & & \cdots \end{array} \qquad \text{Knotenmatrix,}$$

wobei die x_{jk} innerhalb einer Zeile paarweise verschieden seien, und $x_{jk} \in [a,b]$ für alle j,k. Sei jetzt $L_n f$ das Lagrange-Polynom zu den Knoten der n-ten Zeile.
Für welche Knotenmatrix gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{C[a,b]} = 0 \quad (f \in C[a,b])?$$

Antwort: Für keine (*Satz von Faber*, später)

3.2 Tschebyscheff-Polynome

Lemma 3
Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\cos n\theta$ darstellbar in der Form

$$\cos n\theta = 2^{n-1}(\cos\theta)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{kn}(\cos\theta)^k \quad (\theta \in \mathbb{R}),$$

wobei die a_{kn} eindeutig bestimmte reelle Koeffizienten sind.
Beweis: Übung.

Definition 2
Das *Tschebyscheff-Polynom* (1. Art) vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch

$$C_0(x) := 1; \quad C_n(x) := 2^{n-1}x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{kn}x^k \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}),$$

wobei die a_{kn} die Koeffizienten aus Lemma 3 sind.

Lemma 4

1. Für $x \in [-1,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$, wobei arccos durch $0 \leq \arccos x \leq \pi$ (Hauptwert) festgelegt ist.

2. Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die dreigliedrige Rekursionsformel

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

3. C_n ist gerade, wenn n gerade ist, und ungerade, wenn n ungerade ist, d.h. $C_n(-x) = (-1)^n C_n(x)$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0)$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ hat C_n einfache Nullstellen bei $x_{kn} = \cos \frac{2k-1}{n}\pi$ $(1 \leq k \leq n)$

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Extremalwerte von C_n auf $[-1,1]$ ± 1 und werden an den Stellen $x'_{kn} = \cos \frac{k\pi}{n}$ $(0 \leq k \leq n)$ angenommen. Es gilt: $C_n(x'_{kn}) = (-1)^k$ $(0 \leq k \leq n)$

6. Für beliebige $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

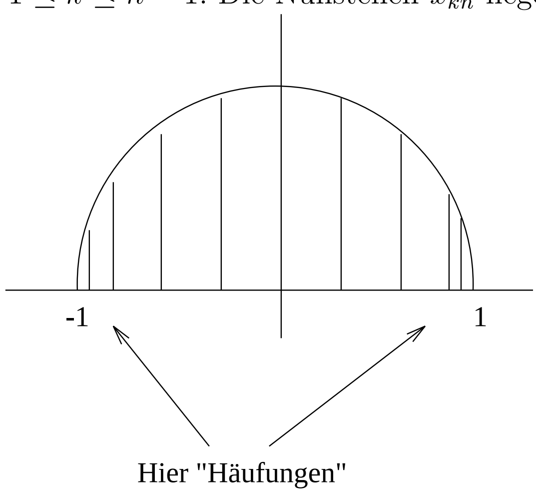
$$\int_{-1}^{1} C_j(x)C_k(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi, & j = k = 0 \\ \pi/2, & j = k \neq 0 \\ 0, & j \neq k \end{cases},$$

   d.h. die Tschebyscheff-Polynome sind *orthogonal* auf $[-1,1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\sqrt{1-x^2}^{-1}$.

7. Die Folge $(C_j)_0^\infty$ bildet ein Fundamentalsystem in $C[-1,1]$ und $L^p(-1,1)$, $1 \leq p < \infty$.

Beweis: Übung.

Bemerkung 3 Die Darstellung in 1) gilt für jeden Zweig des Arcuscosinus. Es wird nur benötigt, daß $\cos \arccos x = x$. Die Extremalwerte in 5) sind relative Extrema für $1 \leq k \leq n-1$. Die Nullstellen x_{kn} liegen „dichter“ an den Endpunkten von $[-1,1]$:



Aus der Definition erhält man sofort $C_0(x) = 1, C_1(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Mit der Rekursionsformel folgt weiter:

$$C_2(x) = 2x^2 - 1,\ C_3(x) = 4x^3 - 3x,\ C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Lemma 5
Sei $\overline{\mathcal{P}_n} \subset \mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynome p_n vom Grad n mit Hauptkoeffizient 1, d.h. mit der Darstellung

$$p_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_j x^j,$$

sei $\overline{C_0} := C_0,\ \overline{C_n} := 2^{1-n} C_n,\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\overline{C_n} \in \overline{\mathcal{P}_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und

$$\overline{C_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{kn}) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei die x_{kn} die Nullstellen aus Lemma 4.4 sind.
Beweis: mit Definition und Produktzerlegung von Polynomen: $C_n(x) = 2^{n-1}x^n + ...$

Satz 3 (Minimaleigenschaft der $\overline{C_n}$ in $\overline{\mathcal{P}_n}$)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^{1-n} = \|\overline{C_n}\|_{C[-1,1]} \leq \|\overline{p_n}\|_{C[-1,1]}\ (\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n})$$

Beweis: C_n nimmt an den Stellen $x'_{kn} = \cos \frac{k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$, die Extremalwerte ± 1 an (Lemma 4.5). Damit nimmt $\overline{C_n}$ an diesen Stellen die Extremalwerte $\pm 2^{1-n}$ an, d.h. $\|\overline{C_n}\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$. Zeige jetzt: $2^{1-n} \leq \|\overline{p_n}\|_{C[-1,1]}$ für alle $\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n}$. Dazu nehmen wir an, daß ein $\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n}$ existiert mit $\|\overline{p_n}\| < 2^{1-n}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\overline{p_n}$ reell, sonst betrachte $\mathrm{Re}\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n}$, für den gilt: $\|\mathrm{Re}\overline{p_n}\|_C \leq \|\overline{p_n}\|_C < 2^{1-n}$.
Sei jetzt $q_n(x) := \overline{C_n}(x) - \overline{p_n}(x)$, dann ist $q_n \in \mathcal{P}_{n-1}$, und $q_n(x'_{kn}) = (-1)^k 2^{1-n} - \overline{p_n}(x'_{kn})$. Wegen $|\overline{p_n}(x'_{kn})| \leq \|\overline{p_n}\| < 2^{1-n}$ gilt

$$q_n(x'_{kn}) > 0 \text{ für } k \text{ gerade}, q_n(x'_{kn}) < 0 \text{ für } k \text{ ungerade.}$$

Damit muß aber zwischen x'_{kn} und $x'_{k+1,n}$ für $k = 0, ..., n-1$ mindestens eine Nullstelle von q_n liegen (Zwischenwertsatz). Damit hat q_n mindestens n Nullstellen, und somit ist (da q_n Polynom vom Grad $n-1$ ist) $q_n = 0$ bzw. $\overline{p_n} = \overline{C_n}$. Damit folgt aber: $2^{1-n} = \|\overline{C_n}\| = \|\overline{p_n}\| < 2^{1-n}$, ein Widerspruch. ∎

Bemerkung 4 Die Tschebyscheff-Polynome sind durch die Ungleichungen in Satz 3 eindeutig bestimmt (Beweis später).

$$\|\overline{C_n}\| \leq \|\overline{p_n}\|\ (\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n})$$

Folgerung 3 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $\inf\limits_{\overline{p_n} \in \overline{\mathcal{P}_n}} \|\overline{p_n}\|_{C[-1,1]} = \|\overline{C_n}\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$

2. $\inf\limits_{c_k\in\mathbb{C}} \|x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0\|_{C[-1,1]} = \|x^n + 2^{1-n}a_{n-1,n}x^{n-1} + ... + 2^{1-n}a_{0n}\|_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$ mit a_{kn} wie in Lemma 3.

3. $\inf\limits_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}} \|x^n - p_{n-1}\|_{C[-1,1]} = \|x^n - p^x_{n-1}\|_{C[-1,1]}$
   mit $p^x_{n-1}(x) := x^n - \overline{C_n}(x)$

4. $\inf\limits_{x_j\in[-1,1]} \|\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_j)\|_{C[-1,1]} = \|\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_{j+1,n+1})\|_{C[-1,1]} = 2^{-n}$, wobei $x_{j+1,n+1} := \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi$, $j = 0,...,n$ die Nullstellen von C_{n+1} sind.

Beweis: 1.-3.: unmittelbar aus Satz 3

4. Sei $A := \{\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_j);\ x_j \in [-1,1]\} \subset \overline{\mathcal{P}_{n+1}}$, dann folgt

$$2^{-n} =_{1)} \inf_{\overline{p_{n+1}}\in\overline{\mathcal{P}_{n+1}}} \|\overline{p_{n+1}}\| \le \inf_{\overline{p_{n+1}}\in A} \|\overline{p_{n+1}}\| \le \|\underbrace{\overline{C_{n+1}}}_{\in A}\| = 2^{-n} \quad \blacksquare$$

Folgerung 4 (Lösung von Problem 1)
Seien $(t_j)_{j=0}^{n}$ paarweise verschiedene Punkte in $[a,b]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\omega_{n+1}\|_{C[a,b]} &= \|\prod_{j=0}^{n}(t-t_j)\|_{C[a,b]} \ge \|\prod_{j=0}^{n}(t-t_{j+1,n+1})\|_{C[a,b]} \\ &= (b-a)^{n+1}2^{-2n-1} = (\frac{b-a}{2})^{n+1}2^{-n}\end{aligned}$$

wobei $t_{j+1,n+1} := \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi$ die Nullstellen des auf $[a,b]$ transformierten Tschebyscheff-Polynoms $C_{n+1}(t\frac{2}{b-a} - \frac{b+a}{b-a})$, $a \le t \le b$, sind.
Beweis: Für $[a,b] = [-1,1]$ sofort aus Folgerung 3. Für beliebige Intervalle $[a,b]$ mit der Transformation $t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$ ($x = \frac{2}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a}$): $t \in [a,b] \iff x \in [-1,1]$. $\blacksquare$

Folgerung 5
Ist $f \in C[a,b]$, so daß $f^{(n+1)}(x)$ auf (a,b) existiert, und ist L_nf das Lagrange-Polynom zu f vom Grad n zu den Stützstellen

$$t_{j+1,n+1} = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi,\ 0 \le j \le n,$$

dann gilt

$$\|f - L_nf\|_{C[a,b]} \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\sup_{a<x<b}|f^{(n+1)}(x)|$$

Beweis: aus Satz 2, Folgerung 4 $\blacksquare$

Bemerkung 5 Ist $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ und L_nf wie in Folgerung 5, dann gilt

$$\|f - L_nf\|_{C[a,b]} \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]}$$

Bemerkung 6 Die Minimaleigenschaft auf Satz 3 kann man auch in anderen Normen betrachten. Bezüglich der $L^1(-1,1)$-Norm sind die Tschebyscheff-Polynome 2. Art minimal, und bezüglich der $L^2(-1,1)$-Norm die Legendre-Polynome. Für $L^p(-1,1)$, $p \ne 1,2$, ist dieses Problem ungelöst.

3.3 Normen der Lagrange-Operatoren

Wir betrachten eine Stützstellenmatrix Δ für das Intervall $[a,b]$:

$$\Delta := \left| \begin{array}{lllll} x_{00} & & & & \\ x_{01} & x_{11} & & & \\ x_{02} & x_{12} & x_{22} & & \\ \dots & & \dots & & \\ x_{0n} & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \\ \dots & & & & \dots \end{array} \right|$$

wobei die x_{jk} innerhalb einer Zeile paarweise verschieden sind und $x_{jk} \in [a,b]$ für alle j,k. Sei jetzt L_n der Lagrange-Operator zu den Stützstellen der n-ten Zeile, dann gilt nach Lemma 1 $L_n p_n = p_n$ für alle $p_n \in \mathcal{P}_n$. Wegen $\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}_n$ für $k \leq n$ gilt damit auch $L_n p_k = p_k$ für alle $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $k \leq n$. Insbesondere folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n p - p\|_{C[a,b]} = 0 \quad (p \in \mathcal{P})$$

d.h. die $(L_n)_0^\infty$ erfüllen die Bedingung (a)(β) aus Folgerung 1, Kapitel 2 (Konvergenz auf einer Fundamentalmenge).
Frage: Gilt auch $\|L_n f - f\|_{C[a,b]} \to 0$ für alle $f \in C[a,b]$?
Anders ausgedrückt: Bilden die (L_n) einen Approximationsprozeß auf $C[a,b]$?
Nach Folgerung 1, Kapitel 2, müssen wir die Operatornormen der L_n untersuchen. Wir wissen schon aus Lemma 1, daß $\|L_n\|_{[C[a,b]]} \leq \|\sum\limits_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|\|_{C[a,b]}$ ist. Wir zeigen jetzt die Gleichheit.

Lemma 6
Seien $(x_j)_{j=0}^n$ paarweise verschiedene Punkte in $[a,b]$, und sei L_n der zugehörige Lagrange-Operator. Dann gilt

$$\|L_n\|_{[C[a,b]]} \leq \|\sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|\|_{C[a,b]}$$

Beweis: Zeige noch: „$\geq$'. Sei $\lambda_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|$, zeige also $\|L_n\| \geq \|\lambda_n\|$.
Da λ_n stetig auf $[a,b]$ ist, existiert ein $y_0 \in [a,b]$ mit $\lambda_n(y_0) = \max\limits_{a\leq x\leq b} \lambda_n(x) = \|\lambda\|$.
Definiere jetzt die Funktion $g \in C[a,b]$ durch

$$\begin{array}{ll} g(x_k) & := \operatorname{sgn}\big(\underbrace{\ell_k(y_0)}_{\text{reell}}\big) \quad (0 \leq k \leq n) \\ g(x) & \text{linear für } x \in [x_k, x_{k+1}], \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ g(x) & \text{konstant in } [a, x_0] \text{ und } [x_n, b] \end{array}$$

g ist stetig und $\|g\|_{C[a,b]} \leq 1$. Nun gilt für die Operatornorm:

$$\|L_n\| = \sup_{f\in C[a,b], \|f\|=1} \|L_n f\|_{C[a,b]} \geq \|L_n g\|_{C[a,b]} \geq |(L_n g)(y_0)|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\sum_{k=0}^{n} g(x_k)\ell_k(y_0)| \\
&= |\sum_{k=0}^{n} (\operatorname{sgn} \ell_k(y_0)) \cdot \ell_k(y_0)| = \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(y_0)| \\
&= \lambda_n(y_0) = \|\lambda_n\|. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Jetzt: Wir wollen die Normen für die Tschebyscheff-Stützstellen explizit ausrechnen.

Lemma 7
Die Lagrange-Fundamental-Polynome zu den Tschebyscheff-Stützstellen

$$\overline{x}_{kn} := \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \ 0 \le k \le n, n \in \mathbb{N}_0,$$

haben die Darstellung

$$\ell_k(x) = \frac{C_{n+1}(x)\sqrt{1-\overline{x}_{kn}^2}}{(x-\overline{x}_{kn})\omega'_{n+1}(\overline{x}_{kn})}$$

Beweis: Die $\overline{x}_{kn}$ sind die Nullstellen von C_{n+1}, d.h.

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{n+1}(x) &= 2^{-n} C_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-\overline{x}_{kn}) = \omega_{n+1}(x) \\
&= 2^{-n} \cos((n+1)\arccos x) \quad (x \in [-1,1])
\end{aligned}
$$

Für $x \neq \overline{x}_{kn}$ gilt die Darstellung (Lemma 2)

$$\ell_k(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-\overline{x}_{kn})\omega'_{n+1}(\overline{x}_{kn})}$$

Berechne ω'_{n+1}. Dazu:

$$
\begin{aligned}
2^n \omega'_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx} \cos((n+1)\arccos x) \\
&= (n+1)\sin((n+1)\arccos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)\ )
\end{aligned}
$$

Damit gilt wegen $\overline{x}_{kn} \in (-1,1)$:

$$
\begin{aligned}
\omega'_{n+1}(\overline{x}_{kn}) &= \frac{2^{-n}(n+1)}{\sqrt{1-\overline{x}_{kn}^2}} \underbrace{\sin((n+1)\underbrace{\arccos(\overline{x}_{kn})}_{\frac{2k+1}{2n+2}\pi})}_{\sin \frac{2k+1}{2}\pi = (-1)^k} \\
&= \frac{2^{-n}(n+1)}{\sqrt{1-\overline{x}_{kn}^2}} (-1)^k
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Satz 4
Für die Normen der Lagrange-Operatoren $(L_n^T)_0^\infty$ mit den Tschebyscheff-Stützstellen aus Lemma 7 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|L_n^T\|_{[C[-1,1]]}}{\log n} \geq \frac{2}{\pi}$$

Insbesondere gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} \|L_n^T\|_{[C[-1,1]]} = \infty$, d.h. die Lagrange-Operatoren (L_n^T) mit Tschebyscheff-Stützstellen bilden *keinen* Approximationsprozeß auf $C[-1,1]$.

Beweis: Es gilt $\|L_n^T\| = \|\sum\limits_{k=0}^n |\ell_k|\| \geq \sum\limits_{k=0}^n |\ell_k(0)|$. Betrachte Teilfolge $n = 2j+1, j \in \mathbb{N}_0$.

$$\left[\begin{array}{l} \ell_k(x) = \frac{C_{n+1}(x)\sqrt{1-\overline{x}_{kn}^2}}{(x-\overline{x}_{kn})(n+1)(-1)^k}, \overline{x}_{kn} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \\ C_{2j+2}(0) = \cos((2j+2)\arccos 0) = \cos(2j+2)\pi/2 = (-1)^{j+1} \end{array}\right.$$

$$\|L_{2j+1}^T\| \geq \sum_{k=0}^{2j+1} \left| \frac{C_{2j+2}(0) \sin\frac{2k+1}{4j+4}\pi}{(2j+2)\cos\frac{2k+1}{4j+4}\pi} \right| = \frac{1}{2j+2} \sum_{k=0}^{2j+1} |\tan\frac{2k+1}{4j+4}\pi|$$

Nun gilt

$$\sum_{k=j+1}^{2j+1} |\tan\frac{2k+1}{4j+4}\pi| = \sum_{k=j+1}^{2j+1} |\tan(\pi - \frac{4j+4-2k-1}{4j+4}\pi)| = \sum_{k=j+1}^{2j+1} |\tan\frac{4j+4-2k-1}{4j+4}\pi|$$

(da $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$)

$$= \sum_{\nu=j}^{0} |\tan\frac{2\nu+1}{4j+4}\pi| = \sum_{\nu=0}^{j} |\tan\frac{2\nu+1}{4j+4}\pi|$$

(mit Indextransformation $k = 2j+1-\nu, \nu = 2j+1-k$) Damit haben wir:

$$\|L_{2j+1}^T\| \geq \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} |\tan(\frac{2k+1}{4j+4}\pi)| = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} \frac{2k+1}{4j+4}\pi$$

(da $\tan\alpha \geq 0$ auf $[0, \pi/2)$).

Nebenrechnung: $\int_0^{\frac{\pi}{4j+4}} \tan u\, du \leq \frac{\pi}{4j+4} \tan\frac{\pi}{4j+4}$ (tan monoton steigend) $\Rightarrow \tan\frac{\pi}{4j+4} \geq \frac{4j+4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4j+4}} \tan u\, du$.

$\int_{\frac{2k-1}{4j+4}\pi}^{\frac{2k+1}{4j+4}\pi} \tan u\, du \leq \frac{2\pi}{4j+4} \tan\frac{2k+1}{4j+4}\pi$ $(k > 0)$. $\Rightarrow \tan\frac{2k+1}{4j+4}\pi \geq \frac{2j+2}{\pi} \int_{\frac{2k-1}{4j+4}\pi}^{\frac{2k+1}{4j+4}\pi} \tan u\, du$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|L_{2j+1}^T\| &\geq \underbrace{\frac{4}{\pi}}_{\geq\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{4j+4}} \tan u\, du + \sum_{k=1}^{j} \int_{\frac{2k-1}{4j+4}\pi}^{\frac{2k+1}{4j+4}\pi} \tan u\, du \cdot \frac{2}{\pi} \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2j+1}{4j+4}\pi} \tan u\, du = -\frac{2}{\pi} \log(\cos\frac{2j+2}{4j+4}\pi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2j+1}{4j+4}\pi\right)\\
&\qquad \text{da } \cos x \leq \pi/2 - x \text{ auf } [0,\pi/2], \log \text{ monoton fallend auf } (0,1]\\
&= -\frac{2}{\pi}\log\frac{\pi}{4j+4} = \frac{2}{\pi}\log\frac{4j+4}{\pi}
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$\limsup_{j\to\infty}\frac{\|L^T_{2j+1}\|}{\log(2j+1)} \geq \limsup_{j\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\frac{\log\frac{4j+4}{\pi}}{\log(2j+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \quad \blacksquare$$

Folgerung 6
Es gibt ein $g \in C[-1,1]$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty}\|L^T_n g\|_{C[-1,1]} = \infty$.
Beweis: Wie Satz 5.1, Kapitel 2

Bemerkung 7 Die Konstante $2/\pi$ in Satz 4 ist bestmöglich, d.h. sie kann nicht durch eine größere ersetzt werden.
Es gilt (*Luttmann-Rivlin*, 1965):

$$\frac{2}{\pi}\log(n+1)+\frac{2}{\pi}\left(\log\frac{8}{\pi}+\gamma\right) < \|L^T_n\| \leq \log(n+1)+1$$

mit $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(\log n - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) = -0,5772...$ (Eulersche Konstante; *Euler-Mascheroni-Konstante*).

Bemerkung 8 (Grünwald 1936, Marcienkiewicz 1937)
Es existiert ein $g \in C[-1,1]$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty}|(L^T_n g)(x)| = \infty$ für alle $x \in [-1,1]$.

Satz 4 und Folgerung 6 gelten sinngemäß auch für andere Intervalle, wenn man mit den transformierten Tschebyscheff-Stützstellen arbeitet. Dies folgt aus Lemma 8:

Lemma 8
Seien $(x_j)_{j=0}^n$ paarweise verschiedene Punkte in $[a,b]$, und sei $\varphi(x) = \alpha x+\beta$ die lineare Transformation, die $[a,b]$ auf $[c,d]$ abbildet. Ferner seien $(\widetilde{x}_j)_{j=0}^n$ die transformierten Punkte. ($\widetilde{x}_j = \varphi(x_j)$) Ist L_n der Lagrangeoperator bzgl. der (x_j) auf $[a,b]$ und $\widetilde{L}_n$ der Lagrangeoperator bzgl. der $(\widetilde{x}_j)$ auf $[c,d]$, dann gilt:

$$\|L_n\|_{[C[a,b]]} = \|\widetilde{L}_n\|_{[C[c,d]]}$$

Beweis: Sei wieder $\ell_k(x) := \prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ und entsprechend $\widetilde{\ell}_k(x) := \prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-\widetilde{x}_j}{\widetilde{x}_k-\widetilde{x}_j}$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\ell}_k(\varphi(x)) &= \prod_{j\neq k}\frac{\varphi(x)-\widetilde{x}_j}{\widetilde{x}_k-\widetilde{x}_j} = \prod_{j\neq k}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_j)}{\varphi(x_k)-\varphi(x_j)}\\
&= \prod_{j\neq k}\frac{(\alpha x+\beta)-(\alpha x_j+\beta)}{(\alpha x_k+\beta)-(\alpha x_j+\beta)} = \prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j} = \ell_k(x)
\end{aligned}
$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\|\widetilde{L}_n\|_{[C[c,d]]} &= \|\sum_{k=0}^{n} |\widetilde{\ell}_k|\|_{C[c,d]} = \sup_{x\in[c,d]} \sum |\widetilde{\ell}_k(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \sum |\widetilde{\ell}_k(\varphi(x))| \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \sum |\ell_k(x)| = \|L_n\|_{C[a,b]} \ \blacksquare\end{aligned}$$

Auf die Tschebyscheff-Stützstellen waren wir durch Minimieren des Fehlergliedes in Folgerung 2 gekommen, d.h. für diese spezielle Fehlerabschätzung sind die Tschebyscheff-Stützstellen optimal. Dennoch erzeugen sie keinen Approximationsprozeß. Dies bedeutet aber noch nicht, daß auch andere Stützstellen keinen Approximationsprozeß bilden.

Äquidistante Stützstellen

Lemma 9
Sei $[a,b] = [0,1]$ und $x_j = j/n, j = 0,...,n$. Für die Lagrange-Operatoren L_n bzgl. dieser Stützstellen gilt:

$$\|L_n\|_{[C[0,1]]} \geq M \cdot \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \log n}$$

Beweis: Übung. Schönhage: *Approximationstheorie*, S. 126

(also auch kein Approximationsprozeß)

Bemerkung 9 Wegen Lemma 8 gilt dies auch für andere Intervalle.

- *Runge*, 1901: $[a,b] = [-5,5], f(x) = (1-x^2)^{-1}$.
  $(L_n f)(x)$ divergiert für alle $|x| > 3,6334...$
- *Bernstein*, 1914: $[a,b] = [-1,1], f(x) = |x|$.
  $(L_n f)(x)$ divergiert für alle $x \neq 0, \pm 1$.

(beides für äquidistante Stützstellen)

Gibt es überhaupt Stützstellen, für die wir einen Approximationsprozeß erhalten?
Nein:
Satz (Faber, Bernstein 1914)
Sei Δ eine Stützstellenmatrix für $[a,b]$, und seien L_n^Δ die zugehörigen Lagrange-Operatoren, dann existiert ein $f \in C[a,b]$ mit

$$\limsup \|L_n f\|_{C[a,b]} = \infty,$$

d.h. die (L_n^Δ) bilden keinen Approximationsprozeß.
(Beweis später)

Die Tschebyscheff-Stützstellen liefern den kleinsten Fehler in Satz 2 und Folgerung 2.

Stützstellen mit minimaler Norm?

Satz (Kilgore, de Boor, Pinkus, Luttmann, Rivlin 1966-77)
Zu jedem $n \geq 2$ existierten eindeutig bestimmte paarweise verschiedene Punkte $(x_j)_{j=0}^n$ in $[a,b]$, für die die Norm der zugehörigen Lagrange-Operatoren L_n minimal wird. Für diese L_n gilt:

$$\|L_n\|_{[C[a,b]]} < \|L_n^T\|_{[C[a,b]]},$$

wobei L_n^T die Lagrange-Operatoren bezüglich der transformierten Tschebyscheff-Stützstellen sind.
(ohne Beweis)

(Damit nicht alles so negativ aussieht, zum Schluß noch ein positives Erlebnis)

Satz (Marcinkievicz)
Zu jedem $f \in C[a,b]$ existiert eine Stützstellenmatrix Δ, so daß für die zugehörigen Lagrange-Operatoren L_n^Δ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n^\Delta f - f\|_{C[a,b]} = 0$$

Beachte: Δ hängt von f ab!
(Beweis später) (kein konstruktiver Beweis; Δ existiert, kann aber nicht angegeben werden)

3.4 Hermite-Interpolation (osculatory interpolation)

Gegeben seien $n+1$ paarweise verschiedene Punkte $(x_j)_{j=0}^n \subset \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen $(\alpha_j)_{j=0}^n$ sowie für jedes $j = 0,1,...,n$ komplexe Zahlen $(y_j^{(\nu)})_{\nu=0}^{\alpha_j-1}$.
Gesucht ist ein Polynom $p_N \in \mathcal{P}_N$ mit $N = (\sum\limits_{j=0}^n \alpha_j) - 1$, das die Bedingung

$$(*) \quad p_N^{(s_j)}(x_j) = y_j^{(s_j)} \quad (j = 0,...,n; s_j = 0,...,\alpha_j - 1)$$

erfüllt.

Bemerkung 10 Ist $\alpha_j = 1$ für alle j, dann ist dies das Lagrange-Interpolationsproblem.

Satz 5
Das oben geschilderte Problem besitzt eine eindeutige Lösung, die durch

$$p_N(x) := \sum_{k=0}^n \sum_{\mu=0}^{\alpha_k-1} y_k^{(\mu)} \ell_{k,\mu}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben ist, mit den *Hermite-Fundamentalpolynom*en

$$\ell_{k,\mu}(x) := \widetilde{\omega}_k(x) \frac{1}{\mu!} \sum_{\nu=\mu}^{\alpha_k-1} (x-x_k)^\nu \frac{1}{(\nu-\mu)!} [\frac{1}{\widetilde{\omega}_k(x)}]_{x=x_k}^{(\nu-\mu)}$$

und $\widetilde{\omega}_k(x) = \prod_{\nu=0,\neq k}^{n} (x - x_\nu)^{\alpha_\nu}$.

Beweis: Wir betrachten zunächst das homogene Problem, d.h. alle $y_j^{(s)} = 0$. Dieses Problem hat sicherlich die Lösung $p_N = 0$. Sei jetzt umgekehrt $p_N \in \mathcal{P}_N$ ein Polynom, das $(*)$ erfüllt (mit $y_j^{(s)} = 0$). Dann hat p_N bei x_0 eine Nullstelle der Vielfachheit α_0, bei x_1 eine Nullstelle der Vielfachheit α_1, usw. Insgesamt hat $p_N \leq \sum \alpha_j$ Nullstellen (nach Vielfachheit gezählt). Damit hat $p_N \in \mathcal{P}_N$ mindesten $N+1$ Nullstellen, d.h. $p_N = 0$. Somit hat das homogene Problem höchstens eine Lösung.
Seien jetzt die $y_j^{(s)}$ beliebig. Falls p_N und q_N zwei Lösungen von $(*)$ sind, dann ist $p_N - q_N$ eine Lösung des homogenen Problems. Also gilt nach dem ersten Teil des Beweises: $p_N - q_N = 0$ oder $p_N = q_N$.
Zeige also noch, daß das angegebene Polynom p_N das Problem löst (Übung). ∎

Zweiter Beweis von Existenz und Eindeutigkeit ohne dieses explizite Polynom:
Schreibt man $(*)$ ausführlich hin, dann erhält man ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathsf{Aa} = \mathsf{y}$, wobei A eine $(N+1) \times (N+1)$-Matrix ist, a der Vektor mit den gesuchten Polynomkoeffizienten $\mathsf{a} = (a_k)_{k=0}^n$ und y der Vektor mit den $y_j^{(s)}$. Das zuerst behandelte homogene Problem entspricht dabei dem homogenen Gleichungssystem $\mathsf{Aa} = \mathbf{0}$. Da wir bereits wissen, daß das homogene Problem eine eindeutige Lösung hat, hat nach einem Satz der Linearen Algebra das inhomogene Gleichungssystem, und damit auch das inhomogene Interpolationsproblem eine eindeutige Lösung. ∎

Lemma 10 (Formel von Neville und Aitken)
Ist p_N die Lösung von $(*)$ und sind $p_{N-1}, q_{N-1} \in \mathcal{P}_{N-1}$ die Lösungen von

$$\begin{aligned}
p_{N-1}^{(s_j)}(x_j) &= y_j^{(s_j)} \quad (j = 0, ..., n-1;\ s_j = 0, ..., \alpha_j - 1) \\
p_{N-1}^{(s_n)}(x_n) &= y_n^{(s_n)} \quad (s_n = 0, ..., \alpha_n - 2) \\
q_{N-1}^{(s_0)}(x_0) &= y_0^{(s_0)} \quad (s_0 = 0, ..., \alpha_0 - 2) \\
q_{N-1}^{(s_j)}(x_j) &= y_j^{(s_j)} \quad (j = 1, ..., n;\ s_j = 0, ..., \alpha_j - 1),
\end{aligned}$$

dann gilt:

$$(**) \quad p_N(x) = \frac{1}{x_0 - x_n}\{(x - x_n)p_{N-1}(x) - (x - x_0)q_{N-1}(x)\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beweis: Zeige: Rechte Seite von $(**)$ erfüllt die Bedingungen, die an p_N gestellt sind; die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit der Lösung von $(*)$.
Rechne Ableitungen der rechten Seite aus und setze ein – Leibniz-Regel! ∎

Spezialfall: $\alpha_j = 2$ für alle j, d.h. $N = 2n+1$ und $p_N = p_{2n+1}$ erfüllt die Bedingungen

$$p_{2n+1}(x_j) = y_j^{(0)},\ p'_{2n+1}(x_j) = y_j^{(1)} \quad (j = 0, ..., n)$$

p_{2n+1} ist von der Form

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k^{(0)} \ell_{k,0}(x) + \sum_{k=0}^{n} y_k^{(1)} \ell_{k,1}(x)$$

mit

$$\begin{aligned} l_{k,0}(x) &= (\ell_k(x))^2\{1-(x-x_k)\frac{\beta''(x_k)}{\beta'(x_k)}\} \quad \text{und} \\ l_{k,1}(x) &= \ell_k^2(x)(x-x_k), \end{aligned}$$

wobei

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0,\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}, \; \beta(x) := \prod_{\mu=0}^{n}(x-x_\mu)$$

Diese spezielle Form erhält man aus Satz 5 (allgemeine Form; durch Einsetzen) oder durch Überprüfen der Interpolationsbedingungen.

Liegen die (x_j) alle in $[a,b]$, und ist $f \in C[a,b]$ derart, daß die Ableitungen $f^{(s)}(x_j)$ existieren, dann kann man das folgende Problem formulieren:
Gesucht $p_N \in \mathcal{P}_N$ mit

$$p_N^{(s_j)}(x_j) = f^{(s_j)}(x_j) \quad (j=0,...,n;\; s_j = 0,...,\alpha_j - 1)$$

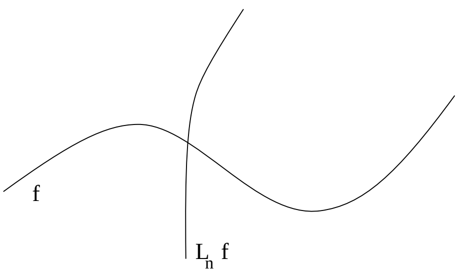
In diesem Fall heißt p_N das *Hermite-Interpolationspolynom* von f und wird mit $H_N f$ bezeichnet.

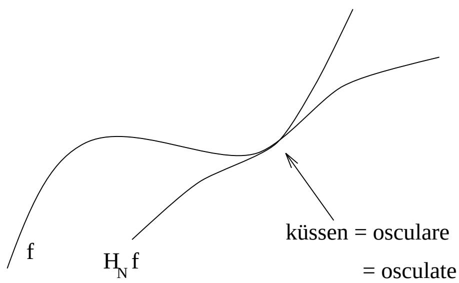
Satz 6
Sei $f \in C^{N+1}[a,b]$ und $H_N f$ wie oben, dann gilt für den Fehler $(R_N f)(x) := f(x) - (H_N f)(x)$:

$$(R_N f)(x) = \prod_{\mu=0}^{n}(x-x_\mu)^{\alpha_\mu}\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$$

für geeignetes $\xi = \xi(f, x, x_0, ..., x_n, \alpha_0, ..., \alpha_n) \in [a,b]$. Insbesondere ist

$$\|R_N f\| \leq \|\prod(\cdot - x_\mu)^{\alpha_\mu}\| \frac{1}{(N+1)!}\|f^{(N+1)}\|$$





3.5 Der Approximationsprozeß von Fejér-Hermite

Gegeben $[a,b] = [-1,1]$, $\overline{x}_{kn} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $0 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}$ (Nullstellen von C_{n+1}) und $f \in C[-1,1]$.
Gesucht ein Polynom $J_{2n+1}f \in \mathcal{P}_{2n+1}$ mit

$$\begin{aligned} (J_{2n+1}f)(\overline{x}_{kn}) &= f(\overline{x}_{kn}) \quad (0 \leq k \leq n) \\ (J_{2n+1}f)'(\overline{x}_{kn}) &= 0 \quad (0 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

Nach Satz 5 besitzt dieses Problem eine eindeutige Lösung, die durch

$$(J_{2n+1}f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\overline{x}_{kn})\ell_{k0}(x) + \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot \ell_{k1}(x)$$

mit $\ell_{k0}(x) = \ell_k^2(x)\{1 - (x - \overline{x}_{kn})\frac{\beta''(\overline{x}_{kn})}{\beta'(\overline{x}_{kn})}\}$ gegeben ist. Dabei ist

$$\beta(x) = \prod_{\mu=0}^{n}(x - \overline{x}_{\mu n}),\ \ \ell_k(x) = \prod_{\mu=0,\neq k}^{n} \frac{x - \overline{x}_{\mu n}}{\overline{x}_{kn} - \overline{x}_{\mu n}}$$

(vgl. Spezialfall $\alpha_j = 2$)
Beachtet man noch, daß $\beta(x) = \overline{C}_{n+1}(x) = 2^{-n}C_{n+1}$, $\ell_k(x) = C_{n+1}(x)\cdot\sqrt{1 - \overline{x}_{kn}^2}/[(x-\overline{x}_{kn})(n+1)(-1)^k]$ $(x \neq \overline{x}_{kn}$, Lemma 3), dann folgt

$$(J_{2n+1}f)(x) = \frac{C_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} f(\overline{x}_{kn}) \frac{1 - \overline{x}_{kn}^2}{(x - \overline{x}_{kn})^2} \cdot \{1 - (x - \overline{x}_{kn})\frac{C''_{n+1}(\overline{x}_{kn})}{C'_{n+1}(\overline{x}_{kn})}\} \quad (x \neq \overline{x}_{kn})$$

$J_{2n+1}f$ heißt das *Fejér-Hermite-Polynom* vom Grad $2n+1$ von f, und J_{2n+1} heißt der *Fejér-Hermite-Operator*.

Lemma 11
Das Fejér-Hermite-Polynom $J_{2n+1}f$ zu $f \in C[-1,1]$ hat die Darstellung

$$(J_{2n+1}f)(x) = \frac{C_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} f(\overline{x}_{kn}) \frac{1 - x\overline{x}_{kn}}{(x - \overline{x}_{kn})^2}$$

mit $\overline{x}_{kn} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi$, wobei man sich die rechte Seite für $x = \overline{x}_{kn}$ stetig ergänzt denkt.
Beweis: RECHNEREI

Folgerung 7
Die Fejér-Hermite-Operatoren sind *positive*, lineare Operatoren von $C[-1,1]$ in sich. Sie sind polynomial vom Grad $2n+1$ und erfüllen $J_{2n+1}(J_{2n+1}f) = J_{2n+1}f$ (*Idempotenz*).
Beweis: linear: klar. $C[-1,1]$ in sich und polynomial klar nach Definition.
positiv: Ist $x \in [-1,1]$, dann ist $|x\overline{x}_{kn}| \leq 1 \cdot 1 = 1$, also $1 - x\overline{x}_{kn} \geq 0$. Setze jetzt $q = J_{2n+1}f$ und zeige $J_{2n+1}q = q$. $J_{2n+1}q$ erfüllt $J_{2n+1}q(\overline{x}_{kn}) = q(\overline{x}_{kn}) = f(\overline{x}_{kn})$ und $(J_{2n+1}q)'(\overline{x}_{kn}) = q'(\overline{x}_{kn}) = 0$. $J_{2n+1}q$ und q erfüllen also dieselben Interpolationsbedingungen. Die Eindeutigkeit der Hermite-Interpolation liefert die Behauptung. ∎

Satz 7
Die Folge $(J_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ der Fejér-Hermite-Operatoren bildet einen linearen Approximationsprozeß auf $C[-1,1]$.
Beweis: Wende Satz von Bohman-Korovkin an: Zeige also:

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \|J_{2n+1}e_0 - e_0\|_{C[-1,1]} = 0, \quad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \sup_x |(J_{2n+1}\varphi_x)(x)| = 0$$

mit $e_0(x) = 1$, $\varphi_x(u) = (u-x)^2$.
Zu (i): Wegen $(J_{2n+1}e_0)(\overline{x}_{kn}) = 1$ und $(J_{2n+1}e_0)'(\overline{x}_{kn}) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ erfüllen $J_{2n+1}e_0$ und e_0 dieselben Hermite-Interpolationsbedingungen. Die Eindeutigkeit liefert $J_{2n+1}e_0 = e_0$.
Zu (ii): Für $x \in [-1,1]$ filgt

$$\begin{aligned}(J_{2n+1}\varphi_x)(x) &= \frac{C_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(\overline{x}_{kn}-x)^2\frac{1-x\overline{x}_{kn}}{(x-\overline{x}_{kn})^2} \\ &= \frac{C_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(1-x\overline{x}_{kn})}_{\leq 2} \leq \frac{C_{n+1}^2(x)}{(n+1)^2}\cdot 2(n+1) \\ &= \frac{2C_{n+1}^2(x)}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \to 0 \text{ (unabhängig von } x\text{)}, (|C_{n+1}(x)| \leq 1) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkung Approximation durch Interpolation ist also durchaus möglich. Allerdings muß man den Polynomgrad höher wählen als für die Interpolation nötig wäre.

Verallgemeinerungen der Lagrange- und Hermite-Interpolation

3.5.1 Hermite-Birkhoff-Interpolation

Gegeben: paarweise verschiedene Punkte $(x_j)_{j=0}^n \subset \mathbb{R}$
Gesucht: ein Polynom $p_N \in \mathcal{P}_N$ mit $p_N^{(s)}(x_j) = y_j^{(s)}$ für gewisse j und s mit $(j,s) \in \{0,1,...,n\} \times \mathbb{N}_0$. Dabei soll $N = \#$ Bedingungen -1 sein.

Beispiel für ein solches Problem:
$p_N(x_0) = y_0^{(0)}$, $p_N''(x_0) = y_0^{(2)}$, $p_N'(x_1) = y_1^{(1)}$, $p_N^{(4)}(x_1) = y_1^{(4)}$, $p_N^{(3)}(x_2) = y_2^{(3)}$, Polynomgrad $N = 4$.
Solche Probleme sind i.a. nicht lösbar, und wenn sie lösbar sind, dann i.a. nicht eindeutig.

Beispiele:

1. Gesucht $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 0, p''(0) = 1, p''(1) = 0$ nicht lösbar, da $p''(x)$ =const
2. Gesucht $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 0, p''(0) = 1, p''(1) = 1$: Jedes p der Form $p(x) = \alpha x + \frac{1}{2}x^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig, ist Lösung.

3.5.2 Mehrdimensionale Lagrange-Interpolation

Hier Dimension 2. Wir betrachten Polynome der Form

$$p_{n,m}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^k y^j$$

Auch hier sind Interpolationsprobleme i.a. nicht bzw. nicht eindeutig lösbar.
(Bemerkung: Die Eindeutigkeit im eindimensionalen Fall liegt am Fundamentalsatz,

nach dem jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat. Im mehrdimensionalen Fall kann es beliebig viele Nullstellen geben.)

Beispiele:
Gesucht $p(x,y) = a + bx + cy + dxy$ mit $p(x_\nu, y_\nu) = z_\nu$ $(\nu = 0,1,2,3)$ und $(x_\nu, y_\nu) = (\nu, 0)$. Man erhält das Gleichungssystem

$$(*) \quad a + b\nu = z_\nu \quad (\nu = 0,1,2,3)$$

Ist jetzt z.B. $z_\nu = 0$ für alle ν, dann folgt $a = b = 0$, und jedes Polynom $p(x,y) = cy + dxy$ mit beliebigen c, d löst das Problem.
Ist dagegen $z_0 = z_1 = z_2 = 0$ und $z_3 = 1$, dann ist $(*)$ nicht lösbar, und auch das Interpolationsproblem nicht.
Identifiziert man jedoch $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und sucht nach Polynomen in z, also $p_n(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$, dann ist wieder jedes vernünftig gestellte Interpolationsproblem lösbar (da der Fundamentalsatz der Algebra hier gilt).

3.6 Interpolation durch Splines

In diesem Abschnitt sei immer $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$.
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$. Wir betrachten folgendes Interpolationsproblem:
Gegeben: komplexe Zahlen $y_j,\ j = 0,1,...,k$.
Gesucht: ein Spline $s \in S_n(\Delta)$ mit $s(x_j) = y_j$ $(j = 0,1,...,k)$.
Bei unserem Problem sind als die Stützstellen gleich den Knoten des gesuchten Splines.

(Man kann das auch anders machen, z.B. nur vorschreiben, daß die $s(x_j)$ in bestimmten Bereichen liegen)
Wir haben $k+1$ Bedingungen, während $\dim S_n(\Delta) = n + k$ ist (vgl. Kapitel 1.8). Für $n = 1$ ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Anzahl der Bedingungen, und wir haben eine eindeutige Lösung, nämlich

Wir wollen diesen trivialen Fall nicht näher untersuchen.
Für $n > 1$ ist die Zahl der Freiheitsgrade echt größer als die Anzahl der Bedingungen, und man kann keine eindeutige Lösung erwarten. Deshalb führt man „künstliche“ Zusatzbedingungen ein. Verschiedene Varianten sind gebräuchlich; wir betrachten das folgende modifizierte Interpolationsproblem:
Gegeben: Komplexe Zahlen $(y_j)_{j=0}^k$ sowie $y_0^{(r)}, y_k^{(r)}$ für $r = 1,...,m-1$.
Gesucht: ein Spline $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ mit

$$(*) \quad \begin{cases} s(x_j) = y_j, & j = 0,1,...,k \\ D^r s(x_0) = y_0^{(r)}, & r = 1,2,...,m-1 \\ D^r s(x_k) = y_k^{(r)}, & r = 1,2,...,m-1 \end{cases}$$

wobei $D^r = (\frac{d}{dx})^r$.
Wir haben $2m + k - 1$ Bedingungen, und $\dim S_{2m-1}(\Delta)$ ist ebenfalls $2m + k - 1$. Bei

dieser Zahl der Zusatzbedingungen muß $n = 2m - 1$ ungerade sein. ($m \geq 2 \Rightarrow n = 2m - 1 > 1$).
Von besonderem Interesse ist der Fall, daß $y_j = f(x_j)$, $y_0^{(r)} = D^r f(x_0)$, $y_k^{(r)} = D^r f(x_k)$ für alle r, j und eine geeignete Funktion $f \in C[a, b]$.

Definition 3
Ist $f \in C^{m-1}[a, b]$ und $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann heißt $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ ein *vollständig interpolierender Spline* vom Grad $2m - 1$ zu f, falls

$$(**) \quad \begin{cases} s(x_j) = f(x_j), & j = 0, 1, ..., k \\ D^r s(x_0) = D^r f(x_0), & r = 1, 2, ..., m-1 \\ D^r s(x_k) = D^r f(x_k), & r = 1, 2, ..., m-1 \end{cases}$$

Über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von $(*)$ oder eines vollständig interpolierenden Splines ist noch nichts gesagt.

Lemma 11 (vgl. Übung 4, Aufgabe 3)
Ist $f \in C^m[a, b]$ und $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ ein vollständig interpolierender Spline zu f, dann gilt

$$\int_a^b \overline{(D^m s)(x)}[(D^m f)(x) - (D^m s)(x)]dx = 0$$

Beweis: Bezeichnen wir das Integral mit I, dann erhalten wir mittels $(m-2)$-maliger partieller Integration
RECHNEREI (Seite 142)

Satz 8 (Erster Integralsatz)
Sei $f \in C^m[a, b]$ und $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ ein vollständig interpolierender Spline zu f, dann gilt

$$\|D_m f\|^2_{L^2(a,b)} = \|D_m s\|^2_{L^2(a,b)} + \|D_m f - D_m s\|^2_{L^2(a,b)}$$

Beweis: Es gilt: RECHNEREI, Seite 143

Folgerung 8
Seien f, s wie in Satz 8. Dann gilt:

$$\|D^m s\|_2 \leq \|D^m f\|_2$$

(Der Spline hat also unter allen Funktionen f mit den geforderten Eigenschaften die kleinste m-te Ableitung bzgl. der L^2-Norm.)

Satz 9
Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2, [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann existiert zu jedem $f \in C^{m-1}[a, b]$ genau ein vollständig interpolierender Spline $s \in S_{2m-1}(\Delta)$.

Erster Beweis: (ähnlich zum zweiten Beweis zur Hermite-Interpolation)
Jedes $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ besitzt die Darstellung

$$s(x) = \sum_{\nu=0}^{2m+k-2} c_\nu N_\nu^{2m-1}(x) \quad (x \in [a, b])$$

mit eindeutigen $c_\nu \in \mathbb{C}$ und normierten B-Splines N_ν^{2m-1} zu einer erweiterten Zerlegung (Kapitel 1.8). Das Interpolationsproblem $(**)$ (Definition 3) läßt sich nun als lineares Gleichungssystem

$$(***) \qquad \mathsf{Ac} = \mathsf{f}$$

schreiben mit $\mathsf{c} = (c_0, ..., c_{2m+k-2})$ als Unbekanntemvektor,

$$\mathsf{f} = (f(x_0), ..., f(x_k), D^1 f(x_0), ..., D^{m-1} f(x_0), D^1 f(x_k), ..., D^{m-1} f(x_k))$$

und der Koeffizientenmatrix ($\mu = 2m + k - 2$)

$$\mathsf{A} := \begin{vmatrix} N_1(x_0) & N_2(x_0) & ... & N_\mu(x_0) \\ ... & & & ... \\ N_1(x_k) & N_2(x_k) & ... & N_\mu(x_k) \\ D_1^N(x_0) & D_2^N(x_0) & ... & D_\mu^N(x_0) \\ ... & & & ... \\ D^{m-1}N_1(x_0) & D^{m-1}N_2(x_0) & ... & D^{m-1}N_\mu(x_0) \\ D_1^N(x_k) & D_2^N(x_k) & ... & D_\mu^N(x_k) \\ ... & & & ... \\ D^{m-1}N_1(x_k) & D^{m-1}N_2(x_k) & ... & D^{m-1}N_\mu(x_k) \end{vmatrix}$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von $(**)$ sind damit äquivalent zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von $(***)$.
Es genügt deshalb zu zeigen, daß das homogene System $\mathsf{Ac} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung besitzt. Dieses homogene System ist aber äquivalent zu $(**)$ mit $f = 0$. Zeige deshalb: $(**)$ besitzt nur die triviale Lösung $s = 0$.
(Denn: $(**)$ besitzt eindeutige Lösung $\iff$ $(***)$ besitzt eindeutige Lösung $\iff$ (lineare Algebra) $\mathsf{Ac} = \mathbf{0}$ besitzt nur triviale Lösung $\iff$ $(**)$ mit $f = 0$ besitzt nur die Lösung $s = 0$.)
Sei also $(**)$ mit $f = 0$ gegeben. Dann gilt für jeden vollständig interpolierenden Spline s nach Folgerung 8: $\|D^m s\|_2 \leq \|D^m f\|_2 = 0$ $(f = 0)$. Damit gilt $D^m s = 0$ f.ü. auf $[a, b]$, und da $D^m s \in C[a, b]$ $(m \leq 2m - 2$, da $m \geq 2)$, muß sogar gelten: $D^m s = 0$ auf $[a, b]$.
Somit existiert ein Polynom $p_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$ mit $s = p_{m-1}$. Nun gilt aber wegen $(**)$ mit $f = 0$, daß $(D^r p_{m-1})(x_0) = (D^r p_{m-1})(x_k) = 0$, $r = 1, ..., m-1$. Somit hat p_{m-1} mindestens $2m - 1$ Nullstellen $\Rightarrow p_{m-1} = 0$, und somit auch $s = 0$. ∎

Zweiter Beweis: Betrachte die Abbildung $L : \mathbb{R}^{2m+k-1} \to \mathbb{R}^{2m+k-1}$, definiert durch

$$L\mathsf{c} := \begin{vmatrix} s(x_0) \\ ... \\ s(x_k) \\ D^1 s(x_0) \\ ... \\ D^{m-1} s(x_0) \\ D^1 s(x_k) \\ ... \\ D^{m-1} s(x_k) \end{vmatrix}$$

mit $\mathsf{c} = (c_0, ..., c_{2m+k-2}) \in \mathbb{R}^{2m+k-1}$ und $s(x) = \sum_{\nu=0}^{2m+k-2} c_\nu N_\nu^{2m-1}(x)$. L ist offensichtlich linear. Zeige: L ist bijektiv, dann existiert zu jedem $\mathsf{y} = (y_0, ..., y_{2m+k-2}) \in \mathbb{R}^{2m+k-1}$ ein Vektor $\mathsf{c} \in \mathbb{R}^{2m+k-1}$ mit $L\mathsf{c} = \mathsf{y}$. Lineare Algebra: L ist genau dann bijektiv, wenn $\text{Kern}L := \{\mathsf{c} \in \mathbb{R}^{2m+k-1} \mid L\mathsf{c} = 0\} = \{0\}$. Sei also $L\mathsf{c} = 0$. Dann gilt: $s(x_0) = 0, \dots, D^{m-1}s(x_k) = 0$, d.h. s ist vollständig interpolierender Spline zu $f = 0$, und es folgt wieder $\|D^m s\|_2 \leq \|D^m f\|_2 = 0$. Wie im ersten Beweis folgt $s = 0$, d.h. $\mathsf{c} = \mathbf{0}$. ■

Folgerung 9
Das Interpolationsproblem $(*)$ besitzt genau eine Lösung.
Beweis: wie zweiter Beweis von Satz 9.

Folgerung 10 (vgl. Übung 4, Aufgabe 3 für $m = 2$)
Sei $\Delta = (x_j)_{j=0}^k$ eine Zerlegung von $[a, b]$, und seien $y_j, y_0^{(r)}, y_k^{(r)}$, $j = 0, ..., k$, $r = 1, ..., m-1$ beliebige komplexe Zahlen. Setzt man

$$\begin{aligned} U \equiv\ & U(\Delta; y_0, ..., y_k^{(m-1)}) := \\ & \{g \in C^m[a, b]; g(x_j) = y_j, D^r g(x_0) = y_0^{(r)}, D^r g(x_k) = y_k^{(r)} \\ & \quad (j = 0, ..., k, r = 1, ..., m-1)\}, \end{aligned}$$

dann gilt für die eindeutige Lösung $s \in S_{2m-1}(\Delta)$ von $(*)$

$$(+) \quad \|D^m s\|_2 = \min_{g \in U} \|D^m g\|_2$$

Ist $t \in U$ mit $\|D^m t\|_2 = \|D^m s\|_2$, dann gilt $t = s$.
Beweis: Es gilt $s \in U$ (beachte $m \leq 2m-2$, da $m \geq 2$), und für jedes $g \in U$ ist s der vollständig interpolierende Spline aus $S_{2m-1}(\Delta)$ zu g. Nach Folgerung 8:

$$\|D^m s\|_2 \leq \|D^m g\|_2 \quad (g \in U)$$

Damit ist $(*)$ gezeigt. Für beliebige $f_1, f_2 \in C[a, b]$ gilt:

$$|f_1 - f_2|^2 + |f_1 + f_2|^2 = 2(|f_1|^2 + |f_2|^2)$$

und somit

$$\|f_1 + f_2\|_2^2 = 2(\|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2) - \|f_1 - f_2\|_2^2$$

Ist nun $t \in U$ mit $\|D^m t\|_2 = \|D^m s\|_2$, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} \|D^m \tfrac{1}{2}(t + s)\|_2^2 &= \frac{1}{4}\|D^m t + D^m s\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|D^m t\|_2^2 + \|D^m s\|_2^2) - \frac{1}{4}\|D^m t - D^m s\|_2^2 \\ &= \|D^m s\|_s^2 - \frac{1}{4}\|D^m t - D^m s\|_2^2 \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{2}(t+s) \in U$. Wäre nun $D^m t \neq D^m s$, d.h. $\|D^m t - D^m s\|_2 \neq 0$, dann existierte ein Element $h \in U$, nämlich $h = \frac{1}{2}(t + s)$ mit $\|D^m h\|_2^2 < \|D^m s\|_2^2$ – ein Widerspruch zu $(+)$. Deshalb muß gelten: $D^m s - D^m t = 0$, d.h. $s - t = p_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$. Wegen der Interpolationsbedingungen hat p_{m-1} mindestens $2m + k - 1$ Nullstellen, d.h. $s = t$. ■

3.7 Konvergenz von Spline-Interpolations-Prozessen

Lemma 12
Sei B eine reelle (komplexe) $n \times n$-Matrix und

$$\|\mathsf{B}\| := \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \qquad (\textit{Zeilensummennorm})$$

1. Versieht man $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) mit der Norm

$$\|x\|_\infty := \max_{1\le j\le n} |x_j| \qquad \text{für } x = (x_1, ..., x_n),$$

   dann wird durch $Tx := \mathsf{B}x$ ein beschränkter linearer Operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) mit Operatornorm $\|T\|_{[\mathbb{R}^n]} = \|\mathsf{B}\|$ definiert.

2. Ist B *streng diagonaldominant*, d.h. $|b_{kk}| > \sum\limits_{j\neq k} |b_{kj}|$, dann gilt $\det \mathsf{B} \neq 0$ und

$$\|\mathsf{B}^{-1}\| \le [\min_{1\le k\le n} |b_{kk}| - \sum_{j\neq k} |b_{kj}|]^{-1}$$

Beweis: Übung

Wir betrachten jetzt die Interpolation durch *kubische Splines* $s \in S_3(\Delta)$ $(m = 2)$.
Die Bedingungen für den vollständig interpolierenden Spline lauten dann:

$$\begin{cases} s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, ..., k \\ s'(x_0) = f'(x_0), \\ s'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$$

Ist f nur aus $C[a, b]$ und nicht aus $C^1[a, b]$, dann brauchen die Ableitungen $f'(x_0), f'(x_k)$ nicht zu existieren. Noch Folgerung 9 existiert aber immer ein eindeutiges $s \in S_3(\Delta)$ mit

$$(*) \qquad \begin{cases} s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, ..., k \\ s'(x_0) = s'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Sei jetzt $V = V_\Delta$ ein Operator, der jedem $f \in C[a, b]$ das eindeutig bestimmte $s \in S_3(\Delta)$, das $(*)$ erfüllt, zuordnet. V ist offensichtlich ein linearer Operator von $C[a, b]$ in $S_3(\Delta) \subset C[a, b]$ und erfüllt

$$(*)' \qquad \begin{cases} Vf(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, ..., k \\ (Vf)'(x_0) = (Vf)'(x_k) = 0 \end{cases}$$

Wir wollen die Operatornorm $\|V\|_{[C[a,b]]}$ abschätzen. Sei dazu $s = Vf$ und $s_j = s|_{[x_{j-1},x_j]}$ die Restriktion von s auf $[x_{j-1}, x_j]$. Da die zweite Ableitung s_j'' ein Polynom vom Grad 1 ist, gilt:

$$s''(x) = s_j''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

($x \in [x_{j-1}, x_j], j = 0, ..., k$), wobei $M_j := s''(x_j), j = 0, ..., k$ und $h_h = x_j - x_{j-1}, j = 1, ..., k$.
Durch zweimaliges Integrieren folgt

$$(**) \quad s_j(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + a_j x + b_j$$

mit zunächst unbekannten a_j, b_j. Setzt man die Interpolationsbedingungen $s_j(x_j) = f(x_j)$ und $s_j(x_{j-1}) = f(x_{j-1})$ in $(**)$ ein, dann erhält man für a_j und b_j das Gleichungssystem

$$a_j x_j + b_j = f(x_j) - M_j\frac{h_j^2}{6}, \; a_j x_{j-1} + b_j = f(x_{j-1}) - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6},$$

das wegen $x_j \neq x_{j-1}$ eindeutig lösbar ist. Setzt man die Lösung in $(**)$ ein, dann ergibt sich...
RECHNEREI von Seite 151-153.

Damit ist das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 13
Sei $f \in C[a, b]$ und Vf wie oben, dann haben die $s_j := Vf|_{[x_{j-1}, x_j]}$ die Darstellung $(***)$, wobei die M_j die eindeutige Lösung von $(****)$ sind. Ferner gilt für die inverse Matrix B^{-1} aus $(****)$: $\|\mathsf{B}^{-1}\| \leq 6\underline{\Delta}^{-1}$ mit $\underline{\Delta} := \min h_j$.

Folgerung 11
Für die M_j aus Lemma 13 gilt ...

GROSSE LÜCKE... SEITEN 154-158 NOCH NACHTRAGEN!!!!!!

4 Orthogonalentwicklungen

4.1 Hilbert-Räume

Definition 1
Sei H ein Linearsystem über dem Körper Φ ($\Phi = \mathbb{R}$ oder $\Phi = \mathbb{C}$). H heißt *Prä-Hilbert-Raum* (*inner product space*), falls eine Abbildung $(\cdot, \cdot)$ von $H \times H$ in Φ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1. $(f, g) = \overline{(g, f)} \quad (f, g \in H)$
2. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g) \quad (\alpha \in \Phi, f, g \in H)$
3. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) \quad (f_1, f_2, g \in H)$
4. $(f, f) \geq 0$ für alle $f \in H$ und
   $(f, f) = 0 \iff f = 0$

Die Abbildung $(\cdot,\cdot)$ heißt *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt.*

Bemerkung 1 Ist $\Phi = \mathbb{R}$, dann bedeutet 1. $(f,g) = (g,f)$. Wegen $(f,f) = \overline{(f,f)}$ ist (f,f) immer reell. Aus 1.-4. folgt weiter:

5. $(f,\alpha g) = \overline{\alpha}(f,g) \quad (\alpha \in \Phi, f,g \in H)$
6. $(f,g_1+g_2) = (f,g_1)+(f,g_2) \quad (f,g_1,g_2 \in H)$
7. $f = 0$ oder $g = 0 \Rightarrow (f,g) = 0$

Lemma 1
Ist H ein Prä-HR, dann gilt die *Schwarz-Ungleichung*

$$|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)(g,g)} \quad (f,g \in H)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn f,g linear abhängig sind.
Beweis: Übung.

Lemma 2

1. Sei H ein Prä-HR, dann wird durch $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$ eine Norm auf H definiert, d.h. H ist unter dieser Norm ein LNR.
2. Sei H ein Prä-HR, dann gilt für die unter 1. definierte Norm die *Parallelogramm-Identität*
$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad (f,g \in H)$$

Beweis: Übung.

Bemerkung 2 Wenn wir im folgenden in Verbindung mit einem Prä-HR von einer Norm sprechen, dann meinen wir immer die in Lemma 2.1 definierte Norm.

Definition 2
Ein Prä-HR heißt *Hilbert-Raum*, falls H unter der Norm aus Lemma 2.1 vollständig ist.

Bemerkung 3 Jeder HR ist ein Banach-Raum.

Beispiele
1) $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ und der Norm $\|x\|_2 = (\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2} = \sqrt{(x,x)}$ ist ein Hilbert-Raum.
Wählt man statt dieser Norm die Norm $\|\cdot\|_\infty$ aus Kapitel 3.7 ($\|x\|_\infty := \max|x_j|$), dann ist der resultierende Raum kein HR, da die Norm nicht über das Skalarprodukt erzeugt wird. Es gibt auch kein anderes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x,x\rangle}$: Gäbe es ein solches, dann müßte $\|\cdot\|_\infty$ die Parallelogramm-Identität erfüllen, was aber nicht der Fall ist, wie man am Beispiel $(1,0),(0,1)$ im $\mathbb{R}^2$ sehen kann.

2) $L^2(a,b)$ mit $(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ und $\|f\|_2 = \{\int_a^b |f|^2\}^{1/2}$ ist ein HR. $L^p(a,b)$ für $p \neq 2$ sind keine Hilberträume.

3) ℓ^2 = Menge der komplexen Zahlenfolgen $c = (c_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ mit Skalarprodukt $(c,d) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\overline{d_k}$ und der Norm $\|c\|_2 := (\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2)^{1/2}$ ist HR.

Bemerkung 4 Für $\mathbb{R}^n$ und ℓ^2 ist die Schwarz-Ungleichung aus Lemma 1 die bekannte *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* aus der Analysis:

$$|\sum a_k b_k| \leq (\sum |a_k|^2)^{1/2}(\sum |b_k|^2)^{1/2}$$

oder auch, wenn man a_k, b_k durch $|a_k|, |b_k|$ ersetzt:

$$\sum |a_k b_k| \leq (\sum |a_k|^2)^{1/2}(\sum |b_k|^2)^{1/2}$$

Beispiele
4) Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ und w eine sogenannte *Gewichtsfunktion* auf (a,b), d.h.

$$w : (a,b) \to [0,\infty) \text{ mit } w > 0 \text{ f.ü. und } w \text{ meßbar}$$

Sei $L^2_w(a,b)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen) meßbarer Funktionen auf (a,b) mit Werten in $\mathbb{C}$ und

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty$$

Auf $L^2_w(a,b)$ definiert man ein Skalarprodukt durch

$$(f,g) := \int_a^b f(u)\overline{g(u)}w(u)du \quad (f,g \in L^2_w(a,b)),$$

und die Norm wird definiert durch

$$\|f\|_{L^2_w} := (\int_a^b |f(u)|^2 w(u)du)^{1/2}$$

Spezialfälle:
a) $(a,b) = (-1,1), w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$
$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow w(x) = 1;\ \alpha = \beta = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow w(x) = (1-x^2)^{\pm 1/2}$
b) $(a,b) = (0,\infty), w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$
c) $(a,b) = (-\infty,\infty), w(x) = e^{-x^2}$

4.2 Orthogonalsysteme im Prä-Hilbertraum

Definition 3 Sei H ein Prä-HR.

1. Zwei Elemente $f, g \in H$ heißen *orthogonal* (zueinander), falls $(f,g) = 0$. Bezeichnung: $f \perp g$.

2. $S \subset H$ heißt *Orthogonalmenge*, falls für jedes Paar $f, g \in S$ mit $f \neq g$ gilt: $(f, g) = 0$.

3. $S \subset H$ heißt *Orthonormalmenge* (*orthonormiert*), falls für jedes Paar $f, g \in S$ gilt: $(f, g) = \delta_{f,g}$.

4. Eine abzählbare Orthogonalmenge $S \subset H$ heißt *Orthogonalsystem* (*OGS*), eine abzählbare Orthonormalmenge $S \subset H$ heißt *Orthonormalsystem* (*ONS*).

Satz 1 (Bessel-Ungleichung)
Sei H ein Prä-HR, S ein ONS in H und S' eine endliche Teilmenge von S, dann gilt

$$\sum_{\varphi \in S'} |(f, \varphi)|^2 \leq \|f\|_H^2 \quad (f \in H)$$

Beweis: Sei $(\varphi_k)_{k=0}^n$ eine beliebige Indizierung von S'. Setze $c_k = (f, \varphi_k) \in \Phi$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k) \\ &= (f, f) - \sum_{k=0}^n c_k \underbrace{(\varphi_k, f)}_{\overline{c_k}} - \sum_{k=0}^n \overline{c_k} \underbrace{(f, \varphi_k)}_{c_k} + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n c_k \overline{c_j} \underbrace{(\varphi_k, \varphi_j)}_{\delta_{k,j}} \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n c_k \overline{c_k} + \sum_{k=0}^n c_k \overline{c_k} = \|f\|_H^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung 1 (Bessel-Ungleichung)
Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt

$$\sum_{\varphi \in S} |(f, \varphi)|^2 \leq \|f\|_H^2 \quad (f \in H)$$

Definition 4
Sei H ein Prä-HR und $\mathbb{A}$ eine der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{Z}$. Ein ONS $S = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{A}} \subset H$ heißt *total* (*vollständig*) in H, falls aus $(f, \varphi_k) = 0 \forall k \in \mathbb{A}$ folgt, daß $f = 0$ ist.
(total = ganz $\sim$ vollständig)

Total oder vollständig bedeutet, daß man S nicht vergrößern kann, ohne daß die Orthonormiertheit verloren geht: Sei nämlich $\widetilde{S} \supsetneq S$ und $\widetilde{S}$ ebenfalls orthonormal. Dann würde aus $f \in \widetilde{S} \setminus S$ folgen, daß

$$(*) \quad (f, \varphi_k) = 0, k \in \mathbb{A} \qquad (**) \quad (f, f) = 1$$

Da S total ist, folgt aber aus $(*)$ schon $f = 0$, was ein Widerspruch zu $(**)$ ist.

Lemma 3
Sei $S = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{A}}$ ein ONS im Prä-HR H. Ist S fundamental in H, dann ist S auch total.

Beweis: Sei $f \in H$ mit $(f, \varphi_k) = 0 \forall k \in \mathbb{A}$. Zeige: $f = 0$.
Zu diesem f und beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren eine endliche Menge $\mathbb{A}^* \subset \mathbb{A}$ und $\alpha_k \in \Phi$ mit

$$\|f - \underbrace{\sum_{\mathbb{A}^*} \alpha_k \varphi_k}_{\psi}\|_H < \varepsilon$$

Da nach Voraussetzung

$$(f, \psi) = (f, \sum_{\mathbb{A}^*} \alpha_k \varphi_k) = \sum_{\mathbb{A}^*} \overline{\alpha_k} \underbrace{(f, \varphi_k)}_{0} = 0$$

ist, folgt

$$\varepsilon^2 > \|f - \psi\|_2^2 = (f - \psi, f - \psi) = \underbrace{(f, f)}_{\geq 0} - \underbrace{(\psi, f)}_{0} - \underbrace{(f, \psi)}_{0} + \underbrace{(\psi, \psi)}_{\geq 0} \geq 0$$

Insbesondere: $0 \leq (f, f) < \varepsilon^2$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muß $(f, f) = 0$ sein, und damit $\|f\| = 0$, also $f = 0$. ∎

Beispiel: $L^2_{2\pi}$ ist mit Skalarprodukt $(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$ ein Hilbert-Raum ($\|f\|_2 = \sqrt{\int |f|^2}$). $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ ist ein ONS, denn

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} \overline{e^{ikx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x} dx = \delta_{jk}$$

(φ_k) ist fundamental (Kapitel 1), also auch total.

Satz 2 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren)
Sei H ein Prä-HR und $T = (g_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset H$ derart, daß jede endliche Teilmenge von T linear unabhängig ist. Dann existieren $\alpha_{kj} \in \Phi$ $(k \in \mathbb{N}_0, j = 0, ..., k)$ mit $\alpha_{kk} > 0$, so daß $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $\varphi_k := \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_{kj} g_j$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, ein ONS bilden.
Beweis: Übung.

Lemma 4
Seien $H, (g_k)$ wie in Satz 2 und $h_k := \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_{kj} g_j$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$ und $\alpha_{kk} > 0$, dann gilt $g_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \beta_{kj} h_j$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit geeigneten $\beta_{kj} \in \mathbb{C}$ und $\beta_{kk} > 0$.
Beweis: vollständige Induktion über k.
(DETAILS: Seite 167,178)

Folgerung 2
Seien $H, (g_k)$ wie in Satz 2, und sei $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein ONS mit

$$\psi_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} g_j \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

mit $\alpha_{kj} \in \Phi$ und $\alpha_{kk} > 0$, dann gilt

$$(\psi_k, g_j) = 0, \quad j = 0, 1, ..., k-1.$$

Beweis: Nach Lemma 4 gilt $g_j = \sum\limits_{\nu=0}^{j} \beta_{j\nu}\psi_\nu$, und damit

$$(\psi_k, g_j) = \sum_{\nu=0}^{j} \overline{\beta_{j\nu}} \underbrace{(\psi_k, \psi_\nu)}_{=0} = 0 \blacksquare$$

Folgerung 3 (Eindeutigkeit)
Seien $H, (g_k)$ wie in Satz 2, und seien $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, (\psi_k^*)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zwei ONS mit

$$\psi_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} g_j \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$\psi_k^* = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj}^* g_j \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

mit $\alpha_{kj}, \alpha_{kj}^* \in \Phi, \alpha_{kk}, \alpha_{kk}^* > 0$, dann gilt $\psi_k = \psi_k^*$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere sind die φ_k aus Satz 2 eindeutig bestimmt.

Beweis: $\Psi_k := \alpha_{kk}^{-1}\psi_k, \Psi_k^* := (\alpha_{kk}^*)^{-1}\psi_k^*$. Dann ist $D_k := \Psi_k - \Psi_k^* = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \gamma_{kj} g_j$ mit gewissen $\gamma_{kj} \in \Phi$. Nach Folgerung 2 gilt

$$(\Psi_k, D_k) = \alpha_{kk}^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \overline{\gamma_{kj}} \underbrace{(\psi_k, g_j)}_{0, \text{ da } j<k} = 0$$

Ebenso $(\Psi_k^*, D_k) = 0$. Damit folgt

$$\Psi_k - Psi_k^*, \Psi_k - Psi_k^*) = (\Psi_k - Psi_k^*, D_k) = (\Psi_k, D_k) - (\Psi_k^*, D_k) = 0,$$

d.h. $\Psi_k - \Psi_k^* = 0$: $\Psi_k = \Psi_k^*$, also $\psi_k = \alpha_{kk}(\alpha_{kk}^*)^{-1}\psi_k^*$.
Zeige noch: $b_k := \alpha_{kk}(\alpha_{kk}^*)^{-1} = 1$. Da $(\psi_k), (\psi_k^*)$ ONS sind, gilt

$$1 = (\psi_k, \psi_k) = (b_k\psi_k^*, b_k\psi_k^*) = b_k\overline{b_k} \cdot \underbrace{(\psi_k^*, \psi_k^*)}_{1} = |b_k|^2$$

Damit ist $|b_k| = 1$. Wegen $b_k = \underbrace{\alpha_{kk}}_{>0}(\underbrace{\alpha_{kk}^*}_{>0})^{-1} > 0$ ist $b_k = 1$. $\blacksquare$

Folgerung 4
Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei w eine Gewichtsfunktion auf (a, b), also $w : (a, b) \to [0, \infty), w > 0$ f.ü., w meßbar.
Falls die Monome x^j für alle $j \in \mathbb{N}_0$ zu $L_w^2(a, b)$ gehören, dann existiert ein eindeutiges ONS

$$p_k(x) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} x^j \in \mathcal{P}_k, \ k \in \mathbb{N}_0$$

mit $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$ und $\alpha_{kk} > 0$.
Beweis: Das System $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt die Voraussetzungen an das System (g_k) aus Satz 2 (= lineare Unabhängigkeit jedes endlichen Teilsystems). Konstruiere also die p_k aus $(x^j)_{j=0}^k$ wie die φ_k in Satz 2 aus (g_j). Die Eindeutigkeit folgt mit Folgerung 3. ∎

Beispiele
1) $(a,b) = (-1,1), w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$. Es gilt:

$$\|x^k\|_{L^2_w(-1,1)} = \int_{-1}^1 \underbrace{|x^k|^2}_{\leq 1} w(x)dx \leq \int_{-1}^1 w(x)dx < \infty, \quad \text{da } \alpha, \beta > -1$$

(Analysis: $\int_{-1}^1 x^\alpha dx \exists$, falls $\alpha > -1$) Die resultierenden orthonormalen Polynome heißen *orthonormierte Jaboci-Polynome*

$$p_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{h_k^{(\alpha,\beta)}} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{\alpha+k}{j}\binom{\beta+k}{k-j}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{k-j}\left(\frac{x+1}{2}\right)^j$$

mit

$$\begin{aligned}
\binom{\gamma}{j} &:= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\gamma-j+1)}, \\
h_k^{(\alpha,\beta)} &:= \frac{k!}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)} \cdot \\
&\cdot \begin{cases} \Gamma(\alpha+\beta+2), & k = 0, \alpha+\beta \leq -1 \\ (2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1), & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha = \beta$: *Ultrasphärische Polynome* oder *Gegenbaum-Polynome*, Gewicht $(1-x^2)^\alpha$
$\alpha = \beta = -1/2$: *Tschebyscheff-Polynome erster Art*, Gewicht $(1-x^2)^{-1/2}$.

$$p_k^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}C_0(x), & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}C_k(x), & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

mit $C_k(x) = \cos(k \arccos x)$.
$\alpha = \beta = 1/2$: *Tschebyscheff-Polynome zweiter Art*, Gewicht $(1-x^2)^{1/2}$.

$$p_k^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x) = U_k(x) = \sin[(n+1)\arccos x](1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}C_{n+1}(x)$$

(wobei $(1-x^2)^{-1/2}$ in ± 1 stetig ergänzt wird)
$\alpha = \beta = 1$: *Legendre-Polynome*, Gewicht 1.

2) $(a,b) = (0,\infty), w(x) = x^\alpha e^{-x}$ für $\alpha > -1$. Es gilt wieder: $x^k \in L^2_w(0,\infty)$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die resultierenden orthonormalen Polynome sind die *verallgemeinerten, normierten Laguerre-Polynome*

$$L_k^\alpha(x) = \sqrt{h_k^{(\alpha)}} \sum_{j=0}^k \binom{\alpha+k}{k-j}\frac{(-x)^j}{j!}, \; k \in \mathbb{N}_0$$

mit $h_k^{(\alpha)} = \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}$.

3) $(a,b) = (-\infty,\infty), w(x) = e^{-x^2}$. Wieder gilt $x^k \in L^2_w$, und die resultierenden Polynome sind die *Hermite-Polynome*

$$H_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}}}(-1)^k 2^{2k} k! \mathcal{L}_k^{(-1/2)}(x^2)$$

$$H_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{2k+1}(2k+1)!\sqrt{\pi}}}(-1)^k 2^{2k+1} k! \mathcal{L}_k^{(-1/2)}(x^2)$$

mit $\mathcal{L}_k^{(\alpha)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{\alpha+k}{k-j} \frac{(-x)^j}{j!}$.

Folgerung 5
Sei $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha,\beta > -1)$. Dann ist das System $(p_k^{(\alpha,\beta)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ total in $L^2_w(-1,1)$.
Beweis: Zeige zunächst, daß die stetigen Funktionen und die Polynome dicht in $L^2_w(-1,1)$ sind (Übung), d.h. die Monome $(x^k)_{\mathbb{N}_0}$ bilden ein Fundamentalsystem in $L^2_w(-1,1)$. Da sich jedes Monom als Linearkombination von Jacobi-Polynomen schreiben läßt (Lemma 4), sind auch die Jacobi-Polynome fundamental in $L^2_w(-1,1)$. Also ist $(p_k^{(\alpha,\beta)})$ nach Lemma 3 auch total. ∎

Ein entsprechendes Ergebnis für $(L^{(\alpha)})$ und (H_k) später.

Definition 5
Sei H ein Prä-HR, $S = (\varphi_j)_{j\in\mathbb{A}}$ ein ONS in H und $f \in H$. Die Zahlen $(f,\varphi_k) \in \Phi, k \in \mathbb{A}$ heißen *Fourier-Koeffizienten* von f bzgl. S. Die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{A}} (f,\varphi_k)\varphi_k$$

heißt *Fourier-Reihe* oder *Orthogonalreihe* von f bzgl. S. Die Schreibweise dafür ist

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{A}} (f,\varphi_k)\varphi_k$$

$$S_n f := \sum_{k\in\mathbb{A},|k|\le n} (f,\varphi_k)\varphi_k$$

ist die n-te *Teilsumme der Fourier-Reihe* von f. S_n heißt *Teilsummenoperator*. (Für $\mathbb{A} = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ ist bei den Teilsummen $n \in \mathbb{N}_0$ zugelassen, für $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ nur $n \in \mathbb{N}$)

Bemerkung 6 $\sim$ ist zunächst nur eine Zuordnung und sagt nicht über die Konvergenz der Reihe.

Beispiel $H = L^2_{2\pi}, \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, Fourierkoeffizienten von $f \in L^2_{2\pi}$:

$$(f,\varphi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\overline{e^{iku}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iku}du$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} f &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du\Big) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du\Big)}_{\hat{f}(k)} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

$\hat{f}(k)$ nennt man ebenfalls *Fourier-Koeffizienten* (trotz anderem Vorfaktor).
Teilsummen: $S_n f(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}$ (vgl. Kapitel 1, Banach-Steinhaus)

Satz 3 (Minimaleigenschaft der Teilsummen)
Seien H ein Prä-HR, $S = (\varphi_k)$ ein ONS in H, S_n der Teilsummenoperator und $f \in H$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}$) und jede Wahl von $\gamma_j \in \Phi, j \in \mathbb{A}, |j| \leq n$, gilt

$$\|f - S_n f\|_H \leq \|f - \sum_{j \in \mathbb{A}, |j| \leq n} \gamma_j \varphi_j\|_H$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\gamma_j = (f, \varphi_j)$.
Von allen „Polynomen" vom Grad n in φ_j haben also die Teilsummen $S_n f$ den kleinsten Abstand von f.
Beweis: Sei $\mathbb{A}' := \{j \in \mathbb{A}, |j| \leq n\}, p = \sum\limits_{j \in \mathbb{A}'} \gamma_j \varphi_j$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|f - p\|_H^2 &= (f - p, f - p) = (f - f) - (p, f) - (f, p) + (p, p) \\ &= (f, f) - \sum_{j \in \mathbb{A}'} \gamma_j (\varphi_j, f) - \sum_{j \in \mathbb{A}'} \overline{\gamma_j} (f, \varphi_j) + \sum_{j \in \mathbb{A}'} \sum_{k \in \mathbb{A}'} \gamma_j \overline{\gamma_k} (\varphi_j, \varphi_k) \\ &= (f, f) - \sum_{j \in \mathbb{A}'} \gamma_j \overline{(f, \varphi_j)} - \sum_{j \in \mathbb{A}'} \overline{\gamma_j} (f, \varphi_j) + \sum_{j \in \mathbb{A}'} |\gamma_j|^2 \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\sum_{j \in \mathbb{A}'} |(f, \varphi_j) - \gamma_j|^2 = \sum |(f, \varphi_j)|^2 - \sum \overline{\gamma_j} (f, \varphi_j) - \sum \gamma_j \overline{(f, \varphi_j)} + \sum |\gamma_j|^2$$

Es folgt also

$$\|f - p\|_H^2 = (f, f) + \sum_{k \in \mathbb{A}'} |(f, \varphi_k) - \gamma_k|^2 - \sum_{k \in \mathbb{A}'} |(f, \varphi_k)|^2$$

Speziell für $p = S_n f$, d.h. $\gamma_j = (f, \varphi_j)$:

$$\|f - S_n f\|_H^2 = (f, f) - \sum_{j \in \mathbb{A}'} |(f, \varphi_j)|^2$$

Durch Vergleich von $\|f-p\|_H^2$ und $\|f-S_nf\|_H^2$ folgt die Behauptung. ∎

Satz 4 (F. Riesz - Fischer)
Sei H ein Prä-HR, $S=(\varphi_k)_{k\in\boldsymbol{A}}$ ein ONS in H und $(c_k)_{k\in\boldsymbol{A}}$ eine Folge in Φ mit

$$\sum_{k\in\boldsymbol{A}}|c_k|^2<\infty \quad (\text{d.h. } (c_k)_{k\in\boldsymbol{A}}\in\ell^2(\mathbb{A})),$$

dann existiert ein $f\in H$ mit

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-\sum\limits_{k\in\boldsymbol{A},|k|\le n}c_k\varphi_k\|_H=0$
2. $c_k=(f,\varphi_k)$, $k\in\mathbb{A}$
3. $\|f\|_H=(\sum\limits_{k\in\boldsymbol{A}}|c_k|^2)^{1/2}$

Beweis:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\sum_{k\in\boldsymbol{A},n\le|k|\le m}c_k\varphi_k\|_H^2 &= (\sum_{k\in\boldsymbol{A},n\le|k|\le m}c_k\varphi_k,\sum_j c_j\varphi_j)\\ &=\sum_k\sum_j c_k\overline{c_j}\underbrace{(\varphi_k,\varphi_j)}_{\delta_{kj}}=\sum_{k\in\boldsymbol{A},n\le|k|\le m}|c_k|^2<\varepsilon\end{aligned}$$

   für alle $n\le m$, n genügend groß, da $\sum\limits_{k\in\boldsymbol{A}}|c_k|^2<\infty$. Damit ist $(\sum\limits_{k\in\boldsymbol{A},|k|\le n}c_k\varphi_k)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in H. Da H vollständig ist, existiert ein $f\in H$ mit 1.

2. Sei $k\in\mathbb{A}$ fest und $n\ge|k|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|(f,\varphi_k)-c_k| &= |(f,\varphi_k)-(\sum_{j\in\boldsymbol{A},|j|\le n}c_j\varphi_j,\varphi_k)|=|(f-\sum_{j\in\boldsymbol{A},|j|\le n}c_j\varphi_j,\varphi_k)|\\ &\le\underbrace{\|f-\sum_{|j|\le n}c_j\varphi_j\|_H\,\|\varphi_k\|_H}_{\to0,n\to\infty} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\|f-\sum_{j\in\boldsymbol{A},|j|\le n}c_j\varphi_j\|^2=\lim_{n\to\infty}(f-\sum_j c_j\varphi_j,f-\sum_k c_k\varphi_k)\\ &=\lim_{n\to\infty}\{(f,f)-\sum_k\overline{c_k}(f,\varphi_k)-\sum_j c_j\overline{(f,\varphi_j)}+\sum_j|c_j|^2\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\{(f,f)-\sum_k|c_k|^2-\sum_j|c_j|^2+\sum_j|c_j|^2\}\\ &=\lim_{n\to\infty}\{(f,f)-\sum_{j\in\boldsymbol{A},|j|\le n}|c_j|^2\}=\lim_{n\to\infty}\{\|f\|_H^2-\sum_{j\in\boldsymbol{A},|j|\le n}|c_j|^2\}\\ &=\|f\|_H^2-\sum_{j\in\boldsymbol{A}}|c_j|^2.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Satz 5
Sei H ein HR, $S = (\varphi_k)_{k \in \mathbb{A}}$ ein ONS in H. Dann sind äquivalent:

1. S ist total in H
2. S ist fundamental in H
3. $\|f\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2 \; \forall f \in H$ (*Parseval-Gleichung*)

Beweis: Ringschluß: (3) ⇒ (2) ⇒ (1) ⇒ (3)
(3) ⇒ (2): Im Beweis von Satz 3 haben wir gezeigt:

$$\|f - S_n f\|^2 = (f, f) - \sum_{\mathbb{A}'} |(f, \varphi_j)|^2$$

mit $\mathbb{A}' := \{j \in \mathbb{A} : \; |j| \leq n\}$. Also

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j} |(f, \varphi_j)|^2$$

$$\sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2 - \sum_{|j| \leq n} (f, \varphi_j)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{A}, |k| > n} |(f, \varphi_k)|^2$$

Da die Summe $\sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2$ nach (3) konvergent ist, gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n f - f\|_H = \Big(\underbrace{\lim_{n \to \infty} \sum_{|k| > n} |(f, \varphi_k)|^2}_{=0} \Big)^{1/2} = 0$$

Das bedeutet, daß die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus S dicht in H ist – also ist S fundamental in H.
(2) ⇒ (1): Lemma 3.
(1) ⇒ (3): Sei jetzt S total in H und $f \in H$ beliebig. Nach Folgerung 1 (Bessel-Ungleichung) gilt

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2$$

Insbesondere ist $\sum |(f, \varphi_k)|^2 < \infty$, d.h. $((f, \varphi_k)) \in \ell^2(\mathbb{A})$. Nach Satz 4 existiert ein $g \in H$ mit

$$(*) \quad (g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad (= c_k \text{ in Satz 4}) \quad (k \in \mathbb{A})$$

und $\|g\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2$. Aus $(*)$ folgt außerdem: $(g - f, \varphi_k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{A}$. Da (φ_k) total ist, muß gelten: $f - g = 0$ oder $f = g$. Somit folgt

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{A}} |(f, \varphi_k)|^2. \; \blacksquare$$

Folgerung 7
Sei H ein HR und $S = (\varphi_k)$ ein ONS in H. Ferner sei $T : H \to \ell^2(\mathbb{A}) : f \mapsto ((f, \varphi_k))_{k \in \mathbb{A}}$.

1. T ist ein beschränkter Operator mit H in $\ell^2(\mathbb{A})$ mit
$$\|T\|_{[H,\ell^2]} = 1.$$

2. Erfüllt S eine der Bedingungen aus Satz 5, dann ist T bijektiv und *isometrisch*, d.h. $\|Tf\|_{\ell^2} = \|f\|_H$.

Beweis:

1. Für $f \in H$ gilt $(\sum_{k\in\mathbb{A}} |(f,\varphi_k)|^2)^{1/2} \le \|f\|_H^2$ (Folgerung 1), d.h. $((f,\varphi_k)) \in \ell^2(\mathbb{A})$. T ist linear, und wegen
$$\|Tf\|_{\ell^2} = (\sum |(f,\varphi_k)|^2)^{1/2} \le \|f\|_H \quad \text{(Bessel)}$$
ist T auch beschränkt mit Norm $\|T\| \le 1$. Wegen $T\varphi_j = (c_k^{(j)})$ mit $c_k^{(j)} = \delta_{kj}$ gilt
$$\|T\varphi_j\|_{\ell^2} = 1 = \sqrt{(\varphi_j,\varphi_j)} = \|\varphi_j\|_H,$$
und wir haben $\|T\| = 1$.

2. T ist injektiv, da $(f,\varphi_k) = (g,\varphi_k)$ $(k \in \mathbb{A}) \Rightarrow (f-g,\varphi_k) = 0$ $(k \in \mathbb{A}) \Rightarrow$ (total) $f = g$. T ist surjektiv wegen Satz 4, und die Isometrie von T folgt aus der Parseval-Gleichung (Satz 5.3). $\blacksquare$

Folgerung 8
Sei H ein HR und $S = (\varphi_k)$ ein ONS in H.

1. Ist die Parseval-Gleichung für alle g aus einer dichten Teilmenge von H erfüllt, dann gilt sie für alle $f \in H$.

2. Ist die Parseval-Gleichung auf einer Fundamentalmenge $G \subset H$ erfullt, dann ist sie überall erfüllt.

Beweis:

1. Sei $F \subset H$ dicht in H. Zu $f \in H$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in F$ mit $\|f-g\| < \varepsilon$. Ist T der Operator aus Folgerung 7, dann kann man die Parseval-Gleichung als $\|Tg\|_{\ell^2} = \|g\|_H$ schreiben.
$$\begin{aligned} 0 &\le \|f\|_H - \|Tf\|_{\ell^2} \qquad \text{(Bessel-Ungleichung)} \\ &= \|f-g+g\| - \underbrace{\|Tf-Tg+Tg\|}_{\ge\|Tg\|-\|Tf-Tg\|} \le \|f-g\| + \underbrace{\|g\|-\|Tg\|}_{0} + \|Tf-Tg\| \\ &\le \|f-g\| + \underbrace{\|T\|}_{\le 1}\,\|f-g\| \le 2\|f-g\| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

2. Sei $T : H \to \ell^2(\mathbb{A})$ mit $Tf = ((f, \varphi_k))_{k \in \boldsymbol{A}}$. Die Bessel-Ungleichung und die Parseval-Gleichung kann man damit schreiben als

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\ell^2(A)} &\leq \|f\|_H \quad \text{(Bessel, gilt immer)} \\ \|Tf\|_{\ell^2(A)} &= \|f\|_H \quad \text{(Parseval)} \end{aligned}$$

Zeige: Parseval gilt auf span G. Seien dazu $g, h \in G, \alpha, \beta \in \Phi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha g + \beta h\|_H^2 &= -\|\alpha g - \beta h\|_H^2 + 2(\|\alpha f\|_H^2 + \|\beta g\|_H^2) \quad \text{(Parallelogramm-Id.)} \\ &= -\|\alpha g - \beta h\|_H^2 + 2(|\alpha|^2\|g\|_H^2 + |\beta|^2\|h\|_H^2) \\ &= -\|\alpha g - \beta h\|_H^2 + 2|\alpha|^2\|Tg\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})} + 2|\beta|^2\|Th\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})} \\ &= -\|\alpha g - \beta h\|_H^2 + 2(\|T(\alpha g)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})} + \|T(\beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}) \\ &= -\|\alpha g - \beta h\|_H^2 + \|T(\alpha g) + T(\beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}^2 + \|T(\alpha g) - T(\beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}^2 \\ &\qquad \text{(Parallelogramm-Identität für } \ell^2(\mathbb{A})) \\ &= \|T(\alpha g + \beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}^2 + \underbrace{\|T(\alpha g - \beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}^2 - \|\alpha g - \beta h\|_H^2}_{\leq 0} \\ &\leq \|T(\alpha g + \beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}^2 \end{aligned}$$

Wir haben: $\|\alpha g + \beta h\|_H \leq \|T(\alpha g + \beta h)\|_{\ell^2(\boldsymbol{A})}$, mit der Bessel-Ungleichung folgt „=“. Damit gilt Parseval auf span G, und da span G dicht in H ist (G Fundamentalmenge), folgt die Behauptung mit Teil 1. ■

Folgerung 9
Sei H ein HR, (φ_k) ein ONS in H und S_n der zugehörige Teilsummenoperator.

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N})$ ist S_n ein beschränkter linearer Operator von H in sich mit $\|S_n\|_{[H]} = 1$, und

$$S_n \varphi_j = \begin{cases} 0, & n < |j| \\ \varphi_j, & n \geq |j| \end{cases}$$

2. Erfüllt (φ_k) eine der Bedingungen aus Satz 5, dann definiert die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0(\mathbb{N})}$ einen linearen Approximationsprozeß auf H, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \|S_n f - f\|_H = 0 \quad (f \in H).$$

Beweis:

1. $S_n f = \sum_{|k| \leq n} (f, \varphi_k)\varphi_k \in H$. Also ist $S_n : H \to H$ linear.

$$\begin{aligned} \|S_n f\|_H^2 &= (\sum_k (f, \varphi_k)\varphi_k, \sum_j (f, \varphi_j)\varphi_j) \\ &= \sum_k \sum_j (f, \varphi_k)\overline{(f, \varphi_j)} \underbrace{(\varphi_k, \varphi_j)}_{\delta_{kj}} \\ &= \sum_k |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|_H^2 \quad \text{(Bessel)} \end{aligned}$$

Also ist S_n beschränkt mit $\|S_n\|_{[H]} \leq 1$. Wählt man $f = \varphi_j$, dann folgt zunächst $S_n \varphi_j = 0, n < |j|$ und $S_n \varphi_j = \varphi_j, n \geq |j|$, sowie für $j = 0$: $\|S_n \varphi_0\| = \sqrt{(\varphi_0, \varphi_0)} = \|\varphi_0\|$, d.h. $\|S_n\|_{[H]} = 1$.

2. Da die (φ_k) fundamental in H sind, folgt die Approximationseigenschaft mit dem Satz von Banach-Steinhaus $(\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\varphi_j - \varphi_j\| = 0\ \forall j)$ ■

Beispiel

1) $H = L^2_{2\pi}, \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. $(S_n f)(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} f\widehat{\ }(k) e^{ikx}$. Da die (e^{ikx}) fundamental in $L^2_{2\pi}$ sind (Kapitel 1, Satz 8), gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^2_{2\pi}} = 0$ $(f \in L^2_{2\pi})$. Also ist (S_n) ein Approximationsprozeß auf $L^2_{2\pi}$ im Gegensatz zu $C_{2\pi}$ oder $L^1_{2\pi}$ (vgl. Kapitel 2). Es gilt $\|S_n\|_{[L^2_{2\pi}]} = 1$, aber $\|S_n\|_{[C_{2\pi}]} = \|S_n\|_{[L^1_{2\pi}]} = \frac{4}{\pi} \log n + \mathcal{O}(1)$.

Analog kann man die Jacobi-Polynome in $L^2_w(-1,1)$ behandeln.

Lemma 5
Die *Laguerre-Polynome* $(L_k^{(\alpha)})_{k=0}^{\infty}$ sind fundamental in $L^2_w(0,\infty)$.
Beweis: (Schönhage: *Approximationstheorie*, S. 83/84)
Skizze: Zeige zunächst: $\{e^{-kx} :\ k \in \mathbb{N}_0\}$ ist Fundamentalmenge in $L^2_w(0,\infty)$ (Übung). Zeige dann die Gültigkeit der Parseval-Gleichung für $e^{-kx}, k \in \mathbb{N}_0$. ■

Somit gilt für die Partialsummen der Laguerre-Orthogonalreihe analog zu Beispiel 1):

$$\|S_n\|_{[L^2_w(0,\infty)]} = 1, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^2_w(0,\infty)} = 0, f \in L^2_w(0,\infty)$$

Ebenso für Hermite.
Ebenso wie beim trigonometrischen System (e^{ikx}) kann man Jacobi-Reihen, Laguerre-Reihen oder Hermite-Reihen in anderen Räumen als L^2_w, z.B. L^1_w oder L^p_w $(p \neq 2)$ betrachten. Allerdings gelten dort die Aussagen für die Operatornorm $\|S_n\|$ und für $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n f - f\|$ i.a. nicht mehr.

4.3 Fourier-Tschebyscheff-Reihen in $C[-1,1]$

Sei $[a,b] = [-1,1], w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Dann bilden die Tschebyscheff-Polynome

$$\widetilde{C}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} C_k(x), & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

mit $C_k(x) = \cos(\arccos kx), x \in [-1,1]$, ein ONS in $L^2_w(-1,1)$. Wegen $C[-1,1] \subset L^2_w(-1,1)$ (mengentheoretisch) sind für $f \in C[-1,1]$ die *Fourier-Tschebyscheff-Koeffizienten* $a_k(f) = (f, \widetilde{C}_k)$, die *Fourier-Tschebyscheff-Reihe* und die Teilsummen der Fourier-Tschebyscheff-Reihe wohldefiniert. Es gilt

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)\widetilde{C}_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \\ f(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\widetilde{C}_k(x) \\ (A_n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(f)\widetilde{C}_k(x) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad \text{Partialsummen} \end{aligned}$$

Wir wissen aus Kapitel 4.3 (4.2 ?), daß

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_{L^2_w} = 0,\ f \in C[-1,1] \subset Ł^2_w(-1,1)$$

Frage: Gilt aber auch

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n f - f\|_{C[-1,1]} = 0,\ f \in C[-1,1]?$$

Lemma 6
Sei arccos der *Hauptwert* des Arcuscosinus, festgelegt durch

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{für } x \in [-1,1].$$

Dann gilt

1. $\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1,1]$
2. $\arccos(\cos\theta) = \theta,\ \theta \in [0,\pi]$
3. $\arccos(\cos\theta) = |\theta|,\ \theta \in [-\pi,\pi]$

Ist F eine 2π-periodische, gerade Funktion, dann gilt

$$(*) \quad F(\arccos(\cos\theta)) = F(\theta)\ (\theta \in \mathbb{R})$$

Achtung: Es gilt *nicht* $\arccos(\cos\theta) = \theta$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$, und $(*)$ gilt *nicht* für beliebige 2π-periodische Funktionen!
Beweis: Analysis.

Lemma 7

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist der Teilsummenoperator A_n der Fourier-Tschebyscheff-Reihe ein beschränkter linearer Operator von $C[-1,1]$ in sich. Er ist ein sogenannter *Projektionsoperator* auf $\mathcal{P}_n$, d.h.

$$A_n p_n = p_n \quad \forall p_n \in \mathcal{P}_n$$

2. Der Operator A_n aus Teil 1. hat die Darstellung

$$(A_n f)(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta) D_n(\theta-\varphi)d\varphi \quad (f \in C[-1,1], \rho \in \mathbb{R})$$

mit dem *Dirichlet-Kern*

$$D_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin\theta/2} \qquad \text{(Kapitel 2)}$$

3. Für die Operatornormen der A_n gilt

$$\|A_n\|_{[C[-1,1]]} = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_{L^1_{2\pi}} = \frac{4}{\log n} + \mathcal{O}(1), n \to \infty$$

Beweis:

1. A_n ist offensichtlich ein linearer Operator von $C[-1,1]$ in $\mathcal{P}_n \subset C[-1,1]$. Wegen $\|\widetilde{C}_k\|_C \leq 1$ und $|a_k(f)| \leq \int_{-1}^1 \|f\|_C \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi\|f\|_C$ erhält man

$$\|A_n\|_C \leq \sum_{k=0}^n |a_k(f)\|\widetilde{C}_k\|_C \leq (n+1)\pi\|f\|_C$$

d.h. A_n ist ein beschränkter Operator.
Ist nun $p_n \in \mathcal{P}_n$, dann hat p_n die Darstellung (vgl. Folgerung 6)

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(p_n)\widetilde{C}_k(x) = (A_n p_n)(x),$$

womit die Projektionseigenschaft bewiesen ist.

2. Sei $k \geq 1$, dann gilt nach Lemma 6 mit $F(\varphi) = \cos k\varphi$:

$$\widetilde{C}_k(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos(\cos\theta)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&a_k(f)\widetilde{C}_k(\cos\theta)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^1 f(u)\cos(k\arccos u)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\theta\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos\varphi)\cos k\varphi\cos k\theta d\varphi \quad (\arccos u = \varphi)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(\cos\varphi)\cos k\varphi\cos k\theta d\varphi \quad (\text{Integrand ist gerade})\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(\cos\varphi)(\cos k\varphi\cos k\theta + \underbrace{\sin k\varphi}_{\int=0}\sin k\theta)d\varphi \quad (\text{da } \sin k\varphi \text{ ungerade})\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(\cos\varphi)\cos(k(\theta-\varphi))d\varphi
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ analog:

$$a_0(f)\widetilde{C}_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 f(u)du \cdot 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(\cos\varphi)d\varphi$$

Für die Partialsummen ergibt sich

$$(A_n f)(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(\cos\theta)\underbrace{\left[1 + 2\sum_{k=0}^n \cos(k(\theta-\varphi))\right]}_{D_n(\theta-\varphi)} d\varphi$$

3. Ist S_n der trigonometrische Fourier-Teilsummenoperator, dann gilt nach Teil 2)
$$(A_n f)(\cos\theta) = (S_n g_f)(\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R})$$
mit $g_f = f \circ \cos$.
Für die Operatornormen der A_n gilt deshalb
RECHNEREI auf Seiten 189-190... ∎

Folgerung 10
Die Teilsummen der Fourier-Tschebyscheff-Reihe bilden keinen Approximationsprozeß auf $C[-1, 1]$.

5 Die Sätze von Harsiladse-Lozinski

Definition 1
Sei X eine beliebige Menge und $T : X \to X$.

1. T heißt *idempotent*, wenn $T(Tf) = Tf$ für alle $f \in X$.
2. Ist $Y \subset X$, heißt T *Projektor* auf Y, falls $Tf \in Y$ $(f \in X)$ und $Tg = g$ $(g \in Y)$.

Lemma 1

1. Jeder idempotente Operator T ist ein Projektor auf $T(X)$.
2. Jeder Projektor ist idempotent.

Beweis:

1. Für alle $f \in X$ gilt $Tf \in T(X)$. Ist $g \in T(X)$, dann existiert ein $h \in X$ mit $Th = g$, und es gilt $Tg = T(Th) = Th = g$.
2. Ist $f \in X$, dann ist $g = Tf \in Y$, und es gilt $T(Tf) = Tg = g = Tf$. ∎

5.1 Der Satz von Harsiladse-Lozinski in $C_{2\pi}$ und $L^1_{2\pi}$

Definition 2
Für $t \in \mathbb{R}$ ist der *Translationsoperator* T_t auf $X_{2\pi}$ definiert durch
$$(T_t f)(x) = f(x + t) \quad (f \in X_{2\pi}, x \in \mathbb{R})$$

Lemma 2
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist der Translationsoperator T_t ein beschränkter linearer Operator mit

1. $\|T_t f\|_{X_{2\pi}} = \|f\|_{X_{2\pi}} \quad (f \in X_{2\pi})$
2. $\|T_t\|_{[X_{2\pi}]} = 1$

3. $T_t T_s = T_{s+t} \quad (s \in \mathbb{R})$

4. $T_t e_k = e_k(t)\ e_k$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ $(k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R})$

5. $\lim\limits_{t\to 0} \|T_t f - f\|_{X_{2\pi}} = 0 \quad (f \in X_{2\pi})$

Beweis: Klar. (1) ist Translationsinvarianz der Norm; (5) gleichmäßige Stetigkeit bzw. Stetigkeit im Mittel, (4) Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. ■

Lemma 3
Sind X, Y zwei LNR, G eine Fundamentalmenge in X und $S, T \in [X, Y]$ mit $Tg = Sg \quad (g \in G)$, dann gilt $T = S$ auf X.
Beweis: Aus $Tg = Sg$ auf G folgt wegen der Linearität $Th = Sh$ auf $\operatorname{span} G$. Sei jetzt $f \in X$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $h \in \operatorname{span} G$ mit $\|f - h\| < \varepsilon$. Es folgt

$$\begin{aligned}\|Sf - Tf\| &= \|Sf \underbrace{-Sh + Th}_{0} - Tf\| \leq \|Sf - Sh\| + \|Th - Tf\| \\ &\leq (\|S\| + \|T\|)\|f - h\| < (\|S\| + \|T\|)\varepsilon, \text{ d.h. } Sf = Tf. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 4
Sei $n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}, P_n$ ein beschränkter, linearer Projektor von $X_{2\pi}$ auf $\Pi_n \subset X_{2\pi}$ und $U_t = T_t P_n T_{-t}$.

1. Es gilt $U_t \in [X_{2\pi}]$ mit $\|U_t\| = \|P_n\|$ und

$$U_t e_k = \begin{cases} e_k, & |k| \leq n \\ e_k(-t) \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(t) e_j, & |k| > n \end{cases}$$

mit gewissen $c_j \in \mathbb{C}$.

2. Ist $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ und $f \in C_{2\pi}$, dann ist die Funktion $g_f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$g_f(t, x) := (U_t f)(x) \quad ((t, x) \in \mathbb{R}^2),$$

stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis:

1. Da $T_t, P_n, T_{-t} \in [X_{2\pi}]$, ist auch $U_t \in [X_{2\pi}]$. Und wegen

$$\|U_t f\| \leq \underbrace{\|T_t\|}_{1} \|P_n\| \underbrace{\|T_{-t}\|}_{1} \|f\|$$

gilt $\|U_t\| \leq \|P_n\|$. Für die umgekehrte Ungleichung wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in X_{2\pi}$ mit $\|g\| = 1$ und $\|P_n g\| > \|P_n\| - \varepsilon$ (existiert nach der Definition der Norm als Supremum). Setze $g^* := T_t g$, dann gilt $g^* \in X_{2\pi}$ und $\|g^*\| = 1$, sowie

$$\begin{aligned}\|U_t g^*\| &= \|T_t P_n T_{-t} g^*\| = \|T_t P_n \underbrace{T_{-t} T_t}_{=Id} g\| \\ &= \|T_t \underbrace{P_n g}_{\in X_{2\pi}}\| =_{\text{La. 1}} \|P_n g\| > \|P_n\| - \varepsilon\end{aligned}$$

Damit ist $\|U_t\| \geq \|P_n\|$, also „=“.
Sei jetzt $|k| \leq n$, dann gilt $P_n e_k = e_k$ ($e_k \in \Pi_n$, Projektoreigenschaft) und

$$\begin{aligned} T_t P_n T_{-t} e_k &= T_t P_n e_k(-t) e_k \quad \text{(Lemma 2.4)} \\ &= e_k(-t) T_t P_n e_k = e_k(-t) T_t e_k \\ &= e_k(-t) e_k(t) e_k = e_k \end{aligned}$$

Für $|k| > n$ gilt wegen $P_n : X_{2\pi} \to \Pi_n$, daß $P_n e_k = \sum\limits_{j=-n}^{n} c_j e_j$ mit gewissen $c_j \in \mathbb{C}$. Es folgt analog:

$$T_t P_n T_{-t} e_k = e_k(-t) T_t P_n e_k = e_k(-t) T_t \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j = e_k(-t) \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(t) e_j$$

2. Aus der Darstellung von $U_t e_k$ folgt sofort, daß die Aussage für $f = e_k$, $k \in \mathbb{Z}$ richtig ist. Aus der Linearität von U_t folgt weiter, daß die Aussage für $f = h \in \Pi$ richtig ist. Sei jetzt $f \in C_{2\pi}$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(h_m)_{m=0}^{\infty}$ mit $h_m \in \Pi_m$ und $\lim\limits_{m\to\infty} \|h_m - f\|_{C_{2\pi}} = 0$ (Kapitel 1). Damit folgt:

$$\sup_{x,t\in\mathbb{R}} |g_{h_m}(t,x) - g_f(t,x)| \leq \sup_{x,t\in\mathbb{R}} |(U_t h_m)(x) - (U_t f)(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|U_t h_m - U_t f\|_{C_{2\pi}}$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \underbrace{\|U_t\|}_{\|P_n\|} \|h_m - f\|_{C_{2\pi}} = \|P_n\| \|h_m - f\|_{C_{2\pi}} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Da die g_{h_m} stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind, ist auch g_f als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig auf $\mathbb{R}^2$. ■

Satz 1 (Berman-Marcinkiewicz-Identität)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C_{2\pi}$ auf Π_n, dann gilt:

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_t P_n T_{-t} f)(x) dt \quad (f \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R}),$$

wobei S_n der Teilsummenoperator der trigonometrischen Fourier-Reihe ist.
Beweis: Sei

$$(N_n f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_t P_n T_{-t} f)(x) dt \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (U_t f)(x) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_f(t,x) dt$$

Da g_f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist, existiert das Integral (als Riemann- oder Lebesgue-Integral) für alle x und definiert eine stetige Funktion (von x) (Analysis) (Literatur: Erwe: *Differential- und Integralrechnung*, Band II).
Da g_f 2π-periodisch in x ist, ist auch $N_n f$ 2π-periodisch, d.h. $N_n f \in C_{2\pi}$. N_n ist also eine lineare Abbildung von $C_{2\pi}$ in sich. N_n ist auch beschränkt, denn:

$$\|N_n f\|_{C_{2\pi}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|U_t f\|_{C_{2\pi}} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|P_n\| \|f\| dt = \|P_n\| \|f\|$$

Es gilt also $N_n \in [C_{2\pi}]$ mit $\|N_n\| \leq \|P_n\|$. Nach Lemma 3 genügt es zu zeigen, daß $N_n g = S_n g$ für alle g aus einer Fundamentalmenge $G \subset C_{2\pi}$. Wähle als Fundamentalmenge $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Nach Lemma 4.2 gilt für $|k| \leq n$:

$$(N_n e_k)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(U_t e_k)(x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)dt = e_k(x),$$

und für $|k| > n$:

$$\begin{aligned}(N_n e_k)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(U_t e_k)(x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(-t)\sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(t)e_j(x)dt \\ &= \sum_{j=-n}^{n} c_j e_j(x)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_k(-t)e_j(t)dt}_{=0,\ \text{da}\ j\neq k} = 0\end{aligned}$$

Wir haben also: $N_n e_k = \begin{cases} e_k, & |k| \leq n \\ 0, & |k| > n \end{cases}$.

Wegen $\widehat{e_k}(j) = \delta_{kj}$ gilt für die S_n: $S_n e_k = \begin{cases} e_k, & |k| \leq n \\ 0, & |k| > n \end{cases}$.

Bemerkung 1 Die Darstellung aus Satz 1 gilt auch für die $L^p_{2\pi}$-Räume; allerdings muß man dann das Integral als sogenanntes *Bochner-Integral* interpretieren.

Satz 2 (Harsiladse-Lozinski, 1948)

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C_{2\pi}$ in Π_n. Dann gilt
$$\|S_n\|_{[C_{2\pi}]} \leq \|P_n\|_{[C_{2\pi}]},$$
wobei S_n der Fourier-Teilsummenoperator ist.

2. Ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge beschränkter linearer Projektoren von $C_{2\pi}$ auf Π_n, dann gilt
$$\limsup \|P_n\|_{[C_{2\pi}]} = \infty.$$

Beweis: Nach Satz 1 gilt

$$\|S_n f\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|U_t f\|dt \leq \|P_n\|\|f\|,$$

womit Teil 1) bewiesen ist. Teil 2) folgt wegen $\limsup \|S_n\| = \infty$ (Kapitel 2). ∎

Bemerkung 2 S_n ist also eine Projektion minimaler Norm (von $C_{2\pi}$ auf Π_n). Man kann zeigen, daß S_n die einzige minimale Projektion von $C_{2\pi}$ auf Π_n ist, d.h. in Satz 2 gilt Gleichheit nur dann, wenn $P_n = S_n$ (1968).

Lemma 5
Seien X, Y NLR, $Z \subset X$ dicht in X, $T \in [X, Y]$, dann gilt:

$$\|T\|_{[X,Y]} = \sup_{g \in Z, \|g\|_X < 1} \|Tg\|$$

Beweis: Zunächst gilt nach Übung 4, Aufgabe 4: $(*)$ $\|T\| = \sup\limits_{f \in X, \|f\| < 1} \|Tf\|$. Damit gilt

$$\sup_{g \in Z, \|g\|_X < 1} \|Tg\| \leq \sup_{f \in X, \|f\|_X < 1} \|Tf\| = \|T\|$$

Für die Umkehrung können wir $\|T\| \neq 0$ annehmen (sonst alles klar). Zeige jetzt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in Z :\ \|g\| < 1$ und $\|Tg\| > \|T\| - \varepsilon$. Sei dann $f \in X$ mit $\|f\| < 1$ und $\|Tf\| > \|T\| - \varepsilon/2$ (f existiert wegen $(*)$). Wähle jetzt $g \in Z$ mit

$$\|f - g\| < \min\{\frac{\varepsilon}{2\|T\|}, \underbrace{1 - \|f\|}_{>0}\}.$$

(g existiert, da Z dicht in X.) Für g gilt:

$$\|g\| \leq \|f - g\| + \|f\| < (1 - \|f\|) + \|f\| = 1$$

und

$$\|T\| - \frac{\varepsilon}{2} < \|Tf\| \leq \|T(f-g)\| + \|Tg\| \leq \|T\|\|f-g\| + \|Tg\| \leq \|T\|\frac{\varepsilon}{2\|T\|} + \|Tg\| = \frac{\varepsilon}{2} + \|Tg\|$$

also $\|Tg\| > \|T\| - \varepsilon$. ■

Satz 3

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und P_n ein beschränkter linearer Projektor von $X_{2\pi}$ (!) auf Π_n, dann gilt
$$\|S_n\|_{[X_{2\pi}]} \leq \|P_n\|_{[X_{2\pi}]}$$

2. Ist $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge beschränkter linearer Projektoren von $C_{2\pi}$ oder $L^1_{2\pi}$ auf Π_n, dann gilt
$$\limsup_{n \to \infty} \|P_n\|_{[C_{2\pi}]} = \infty \text{ bzw. } \limsup_{n \to \infty} \|P_n\|_{[L^1_{2\pi}]} = \infty.$$

Beweis:

1. Aus der Darstellung von $U_t e_k$ in Lemma 4.1 folgt wie im Beweis von Satz 1 zunächst $(S_n e_k)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (U_t e_k)(x) dt$ und dann auch
$$(S_n h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (U_t h)(x) dt$$

mit $h \in \operatorname{span}\{e_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Man beachte, daß $(U_t h)(x)$ als Funktion der beiden Variablen $x, t \in \mathbb{R}$ stetig ist, d.h. das Integral existiert.
Mit Lemma 5 folgt nun

$$\|S_n\|_{[X_{2\pi}]} = \sup_{h \in \operatorname{span}\{e_k\}, \|h\|<1} \|S_n h\| \leq \sup_h \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|U_t h\|_{X_{2\pi}} dt$$

$$\leq \sup_{\|h\|<1} \|P_n\|_{[X_{2\pi}]} \underbrace{\|h\|_{[X_{2\pi}]}}_{<1} \leq \|P_n\|_{[X_{2\pi}]}$$

2. mit Lemma 4, Kapitel 2. ■

Bemerkung 3 Für $X_{2\pi} = C_{2\pi}$ haben wir hier einen weiteren Beweis von Satz 2, der die Berman-Marcinkiewicz-Identität aus Satz 1 nur für $h \in \operatorname{span}\{e_k\}$ benutzt und nicht für alle $f \in C_{2\pi}$.

Folgerung 1
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C_{2\pi}$ auf Π_n, dann ist $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *kein* linearer Approximationsprozeß auf $C_{2\pi}$, und es existiert ein $g \in C_{2\pi}$ mit $\limsup \|P_n g - g\|_{C_{2\pi}} = \infty$.
Eine entsprechende Aussage gilt in $L^1_{2\pi}$.
Beweis: Satz 2,3, Banach-Steinhaus. Vgl. Beweis zu Satz 3, Kapitel 2.

Bemerkung 4 Folgerung 1 gilt nicht in $L^2_{2\pi}$, da hier die (S_n) einen linearen Approximationsprozeß bilden (ebenfalls in $L^p_{2\pi}, 1 < p < \infty$).

Zur Erinnerung: Seien X, Y NLR und $T : X \to Y$.

1. T heißt *stetig* in $f_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(f_0, \varepsilon) :\ \|Tf - Tf_0\|_Y < \varepsilon\ \forall f \in X \text{ mit } \|f - f_0\|_X < \delta$$

   T heißt stetig auf X, falls T in allen $f_0 \in X$ stetig ist.

2. T heißt *beschränkt* (auf X), falls eine Konstante $M > 0$ existiert mit

$$\|Tf\|_Y \leq M\|f\|_X \quad (f \in X)$$

   Für lineare Operatoren gilt: stetig $\iff$ beschränkt (vgl. Definition 2, Kapitel 2).

Folgerung 2
Sei $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Operatoren von $C_{2\pi}$ in sich, dann können die U_n höchstens drei der folgenden vier Eigenschaften besitzen:

1. U_n ist linear für alle $n \in \mathbb{N}_0$
2. U_n bildet $C_{2\pi}$ auf Π_n ab für alle $n \in \mathbb{N}_0$
3. U_n ist idempotent, d.h. $U_n(U_n f) = U_n f$ für alle $f \in C_{2\pi}, n \in \mathbb{N}_0$

4. Für jedes $f \in C_{2\pi}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \|U_n f - f\|_{C_{2\pi}} = 0$, d.h. (U_n) ist ein Approximationsprozeß.

Eine entsprechende Aussage gilt in $L^1_{2\pi}$.
Beweis: Angenommen, (U_n) erfüllt 1),2),3). Dann folgt, daß (U_n) eine Folge beschränkter linearer Operatoren von $C_{2\pi}$ auf Π_n ist. Beachte: stetig $\Longleftrightarrow$ beschränkt für lineare Operatoren. Wegen 2) und 3) sind die U_n lineare Projektoren auf Π_n. Nach Folgerung 1 kann 4) nicht gelten. ■

Folgerung 3
Folgerung 2 gilt auch, wenn man „stetig“ durch „beschränkt“ ersetzt.
Beweis: wie oben.

Bemerkung 5 Folgerungen 1,2,3 gelten auch, wenn man Folgen (P_{n_j}) oder (U_{n_j}) betrachtet, wobei (n_j) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}_0$ ist. Der Beweis ändert sich nicht, da alle auf der Ungleichung $\|S_n\| \leq \|P_n\|$ beruhen.

Bemerkung 6 In $L^2_{2\pi}$ existieren stetige Operatoren, die alle vier Bedingungen erfüllen, z.B. S_n.

In der folgenden Tabelle sind einige Operatoren und ihre Eigenschaften zusammengestellt:

Operator	linear	auf Π_n	idempotent	Approx.-Prozeß
S_n (Teilsumme der FR)	+	+	+	-
Λ_n (trig. Lagrange-Interpol.)	+	+	+	-
σ_n (Fejér-Mittel)	+	+	-	+
V_{min} (de Vallée-Poussin, Üb. 3)	+	+	-	+
A_n^r (Integralmittel, Üb. 5)	+	-	-	+
P_r (Abel-Poisson, Üb. 5)	+	-	-	+
$\mathcal{E}_n$ (beste Approx., Approx. II)	-	+	+	+

5.2 Der Satz von Harsiladse-Lozinski in $C[-1,1]$

Definition 3
Für $f \in C[-1,1]$ und $t \in [-1,1]$ ist der *Tschebyscheff-Translationsoperator* τ_t definiert durch

$$(\tau_t f)(x) := \frac{1}{2}\{f(xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}) + f(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})\}, \quad x \in [-1,1]$$

Beachte: für $x, t \in [-1,1]$ ist $|xt \pm \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}| \leq 1$. Setzt man nämlich $x = \cos\varphi, t = \cos\theta$ für geeignete $0 \leq \varphi, \theta \leq \pi$, dann gilt

$$(*) \quad xt \pm \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)} = \cos\varphi\cos\theta \pm \sqrt{\sin^2\varphi \sin^2\theta}$$

$$= \cos\varphi\cos\theta \pm \sin\varphi\sin\theta = \cos(\theta \pm \varphi) \in [-1,1]$$

Lemma 6
Für $t \in [-1,1]$ ist der Operator τ_t aus Definition 3 ein beschränkter linearer Operator von $C[-1,1]$ in sich mit

1. $\|\tau_t\|_{[C[-1,1]]} = 1$
2. $(\tau_t \widetilde{C}_k)(x) = C_k(t)\widetilde{C}_k(x)$
3. $\lim\limits_{t\to 1-} \|\tau_t f - f\|_{C[-1,1]} = 0 \quad (f \in C[-1,1])$

Beweis:

1. Für jedes feste $t \in [-1,1]$ ist $(\tau_t f)(x)$ als Funktion von $x \in [-1,1]$ wohldefiniert und stetig auf $[-1,1]$. Somit ist $\tau_t f \in C[-1,1]$ und $\tau_t : C[-1,1] \to C[-1,1]$. τ_t ist linear und beschränkt:
$$\|\tau_t f\|_C \le \frac{1}{2}(\|f\|_C + \|f\|_C) = \|f\|_C \quad (f \in C[-1,1])$$
Für $e_0 = 1$ folgt $\tau_t e_0 = e_0$, und somit folgt $\|\tau_t\| \ge \|\tau_t e_0\| = \|e_0\| = 1$.

2. Setzt man wieder $x = \cos\varphi, t = \cos\theta$ mit $0 \le \varphi, \theta \le \pi$, dann folgt mit $(*)$
$$\begin{aligned}(\tau_t C_k)(x) &= (\tau_{\cos\theta} C_k)(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\{\cos(k \arccos(\cos \underbrace{(\theta-\varphi)}_{\in[-\pi,\pi]})) + \cos(k\arccos(\cos(\theta+\varphi)))\}\\ &= \frac{1}{2}\{\cos(k\cdot(\theta-\varphi)) + \cos(k\cdot(\theta+\varphi))\}\\ &= \cos k\theta \cos k\varphi = \cos(k\arccos x)\cos(k\arccos t)\\ &= C_k(x)C_k(t)\end{aligned}$$
Durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bzw. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ erhält man die Behauptung.

3. Es genügt, die Behauptung für $f = \widetilde{C}_k, k \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen, da das System $(\widetilde{C}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ fundamental in $C[-1,1]$ ist (Übung 6, Aufgabe 1). Rest mit Banach-Steinhaus wegen 1). Für die $\widetilde{C}_k$ gilt nach 2):
$$\|\tau_t \widetilde{C}_k - \widetilde{C}_k\|_C = \|C_k(t)\widetilde{C}_k(\cdot) - \widetilde{C}_k(\cdot)\| = \underbrace{|C_k(t) - 1|}_{\to 0, t\to 1-}\|\widetilde{C}_k\|_C$$
$(C_k(t) = \cos(k\arccos t) \to 1, t \to 1-)$ ∎

Lemma 7
Sei $n \in \mathbb{N}_0, t \in [-1,1], P_n$ ein beschränkter, linearer Projektor von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n \subset C[-1,1]$ und $V_t := \tau_t P_n \tau_t$ (beide Indizes $+t$) mit dem Tschebyscheff-Translationsoperator τ_t.

1. Es gilt $V_t \in [C[-1,1]]$ mit $\|V_t\| \le \|P_n\|$, und
$$V_t\widetilde{C}_k = \begin{cases} C_k^2(t)\widetilde{C}_k, & 0 \le k \le n \\ C_k(t)\sum\limits_{j=0}^{n} c_j C_j(t)\widetilde{C}_j, & k > n \end{cases}$$
mit gewissen $c_j \in \mathbb{C}$.

2. Für $f \in C[-1,1]$ ist $h_f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{C}$, definiert durch $h_f(t,x) := (V_t f)(x)$, stetig auf $[-1,1]^2$.

Beweis: wie Lemma 4. Benutze $\tau_t\widetilde{C}_k(x) = C_k(t)\widetilde{C}_k(x)$. ■

Satz 4
Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n$, dann gilt

$$(*) \quad A_n f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} (\tau_t P_n \tau_t f)(x)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt - a_0(f)\widetilde{C}_0(x) \quad (f \in C[-1,1], x \in [-1,1])$$

wobei A_n der Teilsummenoperator der Fourier-Tschebyscheff-Reihe ist und $a_0(f)$ der 0-te Fourier-Tschebyscheff-Koeffizient von f.
Beweis: Sei $N_n f$ die rechte Seite in $(*)$. Das Integral existiert wegen der Stetigkeit von h_f. Die Stetigkeit von $N_n f$ kann nicht wie im Beweis von Satz 1 gefolgert werden, da der Integrand nicht stetig auf $[-1,1]^2$ ist. Wegen

$$|(\tau_t P_n \tau_t f)(x+\xi)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}| \le \|P_n\|\|f\|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in L^1(-1,1)$$

gilt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\xi\to 0}(N_n f)(x+\xi) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\lim_{\xi\to 0}(\tau_t P_n \tau_t f)(x+\xi)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt - \lim_{\xi\to 0} a_0(f)\widetilde{C}_0(x+\xi) = N_n f(x)$$

D.h. $N_n f \in C[-1,1]$. N_n ist also ein linearer Operator von $C[-1,1]$ in sich. Weiter ist

$$\begin{aligned}\|N_n f\|_C &\le \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\|\tau_t P_n \tau_t f\|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt + |a_0(f)|\|\widetilde{C}_0\| \\ &\le \|P_n\|\|f\|\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}_{\pi} + |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}| \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ &\le (2\|P_n\|+1)\|f\|\end{aligned}$$

Die N_n sind also beschränkte lineare Operatoren von $C[-1,1]$ in sich mit

$$\|N_n\| \le 2\|P_n\| + 1.$$

Zu zeigen bleibt: $N_n\widetilde{C}_k = A_n\widetilde{C}_k, k \in \mathbb{N}_0$. Das folgt aus Lemma 7. Beachte: $a_0(\widetilde{C}_k) = \delta_{k0}$. ■

Satz 5

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n$, dann gilt
$$\frac{1}{2}\|A_n\| - \frac{1}{2} \leq \|P_n\|$$
2. Ist (P_n) eine Folge beschränkter linearer Projektoren von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n$, dann gilt
$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\| = \infty.$$

Beweis: In Satz 4 haben wir gezeigt, daß $N_n = A_n$ und $\|N_n\| \leq 2\|P_n\| + 1 \Rightarrow 1)$. 2) folgt aus Lemma 6, Kapitel 4. ■

Bemerkung 7 Satz 5 gilt auch für $C[a,b]$. Beweis mit Variablentransformation.

Bemerkung 8 Mit diesen Methoden kann man nicht den Raum $L^1(-1,1)$ behandeln, sondern nur $L^1_w(-1,1)$ mit $w(x) = \sqrt{1-x^2}^{-1}$. Der $L^1(-1,1)$-Fall wurd 1986 (Görlich-Merkett) bewiesen.

Bemerkung 9 Im trigonometrischen Fall gezeigt: $\|S_n\| \leq \|P_n\|$. Hier nur $\frac{1}{2}\|A_n\| - \frac{1}{2} \leq \|P_n\|$. Projektion minimaler Norm?

Folgerung 4
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei P_n ein beschränkter linearer Projektor von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n$, dann ist $(P_n)_0^\infty$ *kein* linearer Approximationsprozeß auf $C[-1,1]$, und es gibt ein $g \in C[-1,1]$ mit
$$\limsup \|P_n g - g\| = \infty$$

Beweis: Satz 5, Banach-Steinhaus und UBP. ■

Satz 6 (Faber-Bernstein, 1914)
Sei Δ eine Stützstellenmatrix für $[a,b]$, und seien L_n^Δ die zugehörigen Lagrange-Operatoren, dann existiert ein $f \in C[a,b]$ mit
$$\limsup \|L_n^\Delta f - f\|_{C[a,b]} = \infty.$$

Beweis: Die L_n^Δ sind beschränkte lineare Projektoren von $C[a,b]$ auf $\mathcal{P}_n$. Rest mit Folgerung 4. ■

Satz 7 (Nikolaev, 1948)
Sei $w : [-1,1] \to [0,\infty)$ integrierbar und $w > 0$ f.ü. (Gewichtsfunktion), und sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ das zugehörige ONS aus algebraischen Polynomen gemäß Satz 2, Kapitel 4. Sind Φ_n die Teilsummenoperatoren, dann bilden diese keinen Approximationsprozeß auf $C[-1-1]$. Insbesondere existiert ein $f \in C[-1,1]$ mit
$$\limsup \|\Phi_n f - f\|_{C[-1,1]} = \infty.$$

Beweis: Zeige, daß die Φ_n beschränkte lineare Projektoren von $C[-1,1]$ auf $\mathcal{P}_n$ sind. Der Rest ist Folgerung 4.

$\Phi_n : C[-1,1] \to \mathcal{P}_n$ linear. Seien jetzt $c_j(f) := \int_{-1}^{1} f(u)\overline{\varphi_j(u)}w(u)du$, dann gilt

$$\begin{aligned} |c_j(f)| &\leq \|f\|_C \|\varphi_j\|_C \int_{-1}^{1} w(u)du = \|f\|\|\varphi_j\|\|w\|_1 \\ \Rightarrow \quad \|\Phi_n f\| &\leq \sum_{j=0}^{n} |c_j(f)\|\varphi_j\| \leq \|f\| \underbrace{\|w\|_1 \sum_{j=0}^{n} \|\varphi_j\|^2}_{<\infty} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi_n$ ist beschränkt.
Zeige noch $\Phi_n p_n = p_n$ für alle $p_n \in \mathcal{P}_n$. Nach Folgerung 6, Kapitel 4, hat jedes p_n die Darstellung

$$p_n = \sum_{j=0}^{n} (p_n, \varphi_j)\varphi_j = \Phi_n p_n. \blacksquare$$

Folgerung 5
Sei (U_n) eine Folge stetiger oder beschränkter Operatoren von $C[a,b]$ in sich $(b-a < \infty)$. Dann können die U_n höchstens drei der folgenden vier Eigenschaften haben:

1. U_n linear für alle n
2. U_n bildet $C[a,b]$ auf $\mathcal{P}_n$ ab für alle n
3. U_n ist idempotent für alle n
4. $\lim_{n\to\infty} \|U_n f - f\| = 0$ für alle $f \in C[a,b]$

Beweis: wie Folgerung 2/3

Bemerkung 10 Folgerungen 4, 5 gelten auch für Teilfolgen (P_{n_j}) oder (U_{n_j}). (vgl. Bemerkung 6)

Operator	linear	auf $\mathcal{P}_n$	idempotent	Approx.-Prozeß
L_n^{Δ} (Lagrange)	+	+	+	-
A_n (Tschebyscheff-Teilsumme)	+	+	+	-
Φ_n (Satz 7)	+	+	+	-
Bernstein	+	+	-	+
M_n (Bernstein-Dürrmeyer)	+	+	-	+
J_{2n+1} (Fejér-Hermite)	+	$-^{*})$	+	+
$\mathcal{E}_n$ (beste Approx., Approx. II)	-	+	+	+

$^{*})$ nicht *auf* $\mathcal{P}_{2n+1}$. Es gilt $(J_{2n+1}f)'(\overline{x}_{kn}) = 0$. Es gibt aber sicher Polynome $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ mit $p'_{2n+1}(\overline{x}_{kn}) \neq 0$.

Index